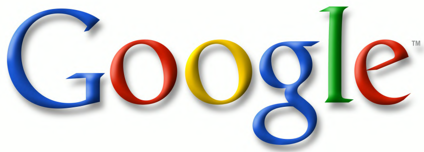


E. Casse. stud. math.



Auflösungen

der

in Meier Hirsch's Sammlung von Beispielen ꝛc.

enthaltenen

Gleichungen und Aufgaben.

Zum

Selbstunterricht bestimmt

von

S. Sachs,

Königl. Regierungs-Bau-Inspektor.



Sechste Auflage.

Berlin.

Verlag von Duncker und Humblot.

1844.

Vorwort
zur sechsten Auflage.

Bei meinem vorgerückten Alter habe ich nicht mehr gehofft, eine neue Auflage vom gegenwärtigen Buche zu erleben, nachdem erst vor fünf Jahren die fünfte Auflage erschienen war. Es hat mich daher aufs Freudigste überrascht, als die Verlags-Handlung mich benachrichtigte, daß sämmtliche Exemplare bereits vergriffen seyen, und daher das Werk aufs Neue aufgelegt werden müsse. Ich fühle mich wegen dieser Theilnahme und Nachsicht gegen das Publikum dankbarlichst verpflichtet, aber auch gegen die ꝛc. Verlags-Handlung kann ich nicht umhin, für die typographische Schönheit, womit sie auch diesmal wieder das Werk auszustatten und eine wahre Pracht-Ausgabe zu veranstalten bemüht war, meinen aufrichtigsten Dank auszusprechen.

Berlin den 1. September 1844.

Der Verfasser.

Vorrede
zur dritten Auflage.

Ein Werk, welches das Glück gehabt, sein Publikum zu finden, soll, wie die Erfahrung lehrt, bei neuen Auflagen wohl verbessert, nicht aber sehr vermehrt werden; weil nicht selten in einer zweckmäßigen Gedrängtheit allein schon der Grund liegt, die öffentliche Meinung für dasselbe zu stimmen. Man hat sich daher auch bei gegenwärtiger dritten Auflage nicht entschließen können, von der einmal gewählten Form und der Art, wie die verschiedenen Auflösungen behandelt worden sind, abzugehen, sondern sich lediglich damit begnügt, das Werk einer strengen Correktur zu unterwerfen, und von allen Fehlern, welche in den vorigen Auflagen aus Versehen sich eingeschlichen hatten, möglichst zu säubern.

Die Absicht, welche den Verfasser bewog, diese Auflösungen herauszugeben, war nicht allein die ausgezeichnet gute Aufnahme, welche die zuerst im Jahre 1804 hier bei Frölich herausgekommene Sammlung von Beispielen, Formeln und Aufgaben aus der Buchstabenrechnung und Algebra, von Meier Hirsch, erhalten hat, so wie die darin herrschende vortreffliche Anord-

nung und Auswahl der Beispiele, sondern auch die, dem Wißbegierigen ein Werk in die Hände zu geben, welches ihn fähig mache, ohne weitere mündliche Anleitung sich diejenige Fertigkeit im Calcül zu erwerben, ohne welche kein Gedeihen in der Algebra zu erwarten ist. Er fand sich hierzu um so mehr veranlaßt, als gerade die Algebra, so wie überhaupt die reine Mathematik eine Wissenschaft ist, welche man eigentlich nur durch den Selbstunterricht oder gar nicht erlernen kann. So wie der Mensch in physischer Hinsicht gar mannigfaltig und verschiedenartig organisirt ist, so ist er es auch in geistiger Hinsicht, und besonders in der Art zu denken und zu schließen. Glückt es daher dem Lehrer nicht, die Individualität des Schülers zu ergründen, und trägt er seinen Satz so vor, wie er ihm gerade klar und deutlich erscheint, ohne sich darum zu bekümmern, ob das Denkvermögen seines Zuhörers sich ebenfalls gewöhnt hat, so und nicht anders zu schließen; so kann er, beim deutlichsten Vortrage, mit Sicherheit darauf rechnen, nicht begriffen zu werden. Der Selbstunterricht hingegen gestattet dem Lehrling eine Muße, sich zu sammeln und in sich selbst zu schauen, seinen gewohnten Ideengang zu verfolgen, die neuen Begriffe mit der ihm eigenthümlichen Weise aufzufassen, und den Satz so lange mit seinen innern Augen zu betrachten, bis

es ihm gelingt, gerade die Ansicht zu gewinnen, welche allein vermögend ist, ihm den Sinn desselben anschaulich zu offenbaren.

Dieser Zweck, die Algebra durch den Selbstunterricht zu verbreiten, wird nunmehr durch das von dem Herrn P. N. C. Egen verfaßte Werk*) unstreitig um so vollkommener erreicht werden. Bei der Beispielsammlung von M. H. mußte natürlich der eigentliche Unterricht in der Algebra vorausgesetzt werden. Wie sehr willkommen muß das Erscheinen des genannten Werkes seyn, da es sich unmittelbar an die Beispielsammlung anschließt und genau dieselbe Methode verfolgt. In diesem mit so vielem Scharfsinn ausgearbeiteten Werke wird die Buchstabenrechnung und die Algebra mit einer eigenen Eleganz vorgetragen, ohne daß dadurch der mathematischen Strenge im geringsten Abbruch geschieht. Wie wichtig eine solche gefällige Einkleidung und wie sehr sie geeignet ist, dem Leser die tiefsten Untersuchungen zu erleichtern und überwinden zu helfen, ist bekannt. Ganz besonders aber zeichnet sich dieses Handbuch auch noch dadurch aus, daß es in jedem Abschnitte das neueste liefert, was über den verhandelten Ge-

---

*) Handbuch der allgemeinen Arithmetik. 2 Bde. (Bd. I. Buchstabenrechnung, Bd. II. Algebra.) gr. 8. Berlin, 1820, bei Duncker und Humblot.

genstand bis jetzt in allen bekannten Sprachen erschienen ist. Es giebt einen rühmlichen Beweis von der ausgebreiteten Belesenheit seines Verfassers und ersetzt für den, welcher die Algebra nicht als Hauptstudium treibt, beinahe die Stelle einer ganzen algebraischen Bibliothek.

Daß übrigens auch noch in dieser Auflage die zur bessern Einsicht der gegebenen Auflösungen herausgehobenen Lehrsätze aus dem Gebiet der Analysis stehen geblieben sind, geschah in der Voraussetzung, daß sich nicht jeder Leser sogleich mit dem Egenschen Werke wird vertraut gemacht haben können, und es ihm daher angenehm sey, sich auf eine andere und unmittelbare Weise Raths zu erholen. Bei einer künftigen Auflage würde sich das vielleicht eher umändern lassen.

Schließlich wünsche ich nur noch, daß sich auch gegenwärtige Auflage denselben Eingang verschaffe als die beiden vorhergehenden, und daß der verdiente Verfasser der Beispielsammlung, Herr Meier Hirsch, welcher seit mehreren Jahren krank niederliegt, bald wieder zum Heil der Wissenschaft genesen möge.

Berlin, den 5ten October 1820.

Der Verfasser.

Vorrede
zur fünften Auflage.

Obgleich dieses Werk einen Nachdruck im Ausland hat erfahren müssen, und die rechtmäßigen Besitzer desselben auch noch dadurch Eingriffe in ihrem Eigenthum zu erdulden hatten, daß es ein hiesiger hochgestellter Gelehrter nicht verschmähet hat, dieselben Auflösungen, in einem etwas veränderten Gewande, unter seinem Namen herauszugeben; so war doch die sehr starke vierte Auflage schon jetzt dergestalt vergriffen, daß seit einiger Zeit auch nicht ein einziges Exemplar mehr vorräthig ist. Die Verlags-Handlung ist daher zur Herausgabe dieser gegenwärtigen fünften Auflage geschritten, und hat dieselbe mit einer solchen typographischen Schönheit ausgestattet, wie dies bei einer streng wissenschaftlichen Schrift, die überdies bereits seit vielen Jahren ihr Publikum gefunden hat, gewiß zu den Seltenheiten gehört, wofür derselben sicherlich die vollste Anerkennung zu Theil werden wird.

Berlin, den 21. December 1838.

Der Verfasser.

Inhalt.

Von den Gleichungen.

Seite

I. Auflösungen der Gleichungen vom ersten Grade mit einer unbekannten Größe 1

II. Auflösungen der Gleichungen vom ersten Grade mit mehreren unbekannten Größen 25

III. Auflösungen der Gleichungen vom zweiten Grade mit einer unbekannten Größe 57

IV. Auflösungen der Gleichungen vom zweiten Grade mit mehreren unbekannten Größen 96

V. Auflösungen der Gleichungen von höhern Graden.
A. Durch die Cardanische Formel 123
B. Durch Aufsuchung ihrer rationalen Wurzeln . . 129
C. Durch Näherung 145

Von den Aufgaben.

VI. Auflösungen der Aufgaben für die Gleichungen des ersten Grades mit einer unbekannten Größe. . . 155

VII. Auflösungen der Aufgaben für die Gleichungen des ersten Grades mit mehreren unbekannten Größen 224

VIII. Auflösungen der Aufgaben für die Gleichungen vom zweiten Grade 280

		Seite
IX.	Auflösungen der Aufgaben für die Gleichungen von höhern Graden	333
X.	Auflösungen von den unbestimmten Aufgaben . . .	346
XI.	Auflösungen der Aufgaben, die Progressionen und die figurirten Zahlen betreffend	371
XII.	Auflösungen der Aufgaben aus der Zins- und Rentenrechnung nebst einigen andern dahin gehörigen .	384
XIII.	Auflösungen der Aufgaben für die Permutationen, Combinationen und Variationen, desgleichen für Wahrscheinlichkeits-Rechnungen	403
XIV.	Auflösungen von den vermischten Aufgaben . . .	425

Berichtigungen.

S. 6	Z. 12	hinter — 519,67567 setze ...
- 9	- 10	st. $-\frac{x}{ab}d$ l. $-\frac{x}{ab}$
- 11	- 1	v. u. im Nenner st. $3a+c$ l. $3a+x$
- 13	- 11	st. x l. x^n
- 14	- 5	im Nenner st. kbdfd l. kbdfh
- 15	- 10	v. u. st. $(a^2-b)^2x$ l. $(a^2-b^2)x$
- 22	- 5	v. u. st. $\frac{2}{3x}$ l. $\frac{3x}{2}$
- 256	- 2	v. u. st. 10- l. 15-
- —	- 1	v. u. st. y l. x und st. 10y l. 15x

Von den Gleichungen.

(Zu Meier Hirsch's Sammlung von Beispielen, 6ter Aufl. XIIItes und XIVtes Kapitel, von S. 123 bis 161.)

I.

Auflösungen der Gleichungen vom ersten Grade mit einer unbekannten Größe.

---

1. Gleichung.

$$ax \pm b = c$$

Auflösung.

1) $ax = c - b$

folgl. $x = \frac{c - b}{a}$

2) $ax = c + b$

folgl. $x = \frac{c + b}{a}$

2. Gleichung.

$$3a + x - 5b + 2 = 7b - a + c + 6$$

Auflösung.

$$x = 7b + 5b - a - 3a + c + 6 - 2$$
$$= 12b - 4a + c + 4$$

3. Gleichung.

$$7 - 9a - 5x + 3cd + x = \tfrac{7}{4} - 3a - 2cd - 2x$$

Auflösung.

$$-5x+x+2x = \tfrac{7}{4}-7-3a+9a-2cd-3cd$$

oder $-2x = -\tfrac{21}{4} + 6a - 5cd$

Verwandelt **man die Zeichen,**

so ist $2x = \tfrac{21}{4} - 6a + 5cd$

folgl. $x = \tfrac{21}{8} - 3a + \tfrac{5}{2}cd$

4. Gleichung.

$$8x - 5 = 13 - 7x$$

Auflösung.

$$8x + 7x = 13+5$$

oder $15x = 18$

folgl. $x = \tfrac{18}{15} = \tfrac{6}{5} = 1\tfrac{1}{5}$

5. Gleichung.

$$13\tfrac{3}{4} - \frac{x}{2} = 2x - 8\tfrac{3}{4}$$

Auflösung.

$$2x + \frac{x}{2} = 13\tfrac{3}{4} + 8\tfrac{3}{4}$$

oder $\dfrac{5x}{2} = \tfrac{45}{2}$

$5x = 45$

folgl. $x = 9$

6. Gleichung.

$$2x + 7 + \tfrac{3}{2}x = 6x - 23$$

Auflösung.

$$2x + \tfrac{3}{2}x - 6x = -23 - 7$$

oder $-\dfrac{5x}{2} = -30$

das ist $\frac{5x}{2} = 30$

oder $5x = 60$

folgl. $x = 12$

7. Gleichung.

$$12\tfrac{1}{4} + 3x - 6 - \frac{7x}{3} = \frac{3x}{4} - 5\tfrac{3}{8}$$

Auflösung.

$$3x - \frac{7x}{3} - \frac{3x}{4} = -5\tfrac{3}{8} + 6 - 12\tfrac{1}{4}$$

oder $-\frac{x}{12} = -11\tfrac{5}{8}$

folgl. $x = 139\tfrac{1}{2}$

8. Gleichung.

$$-6\tfrac{1}{3}x + 158\tfrac{1}{2} - 10x = -\frac{37x}{6} + 19 + \tfrac{3}{8}x$$

Auflösung.

$$-6\tfrac{1}{3}x - 10x + \frac{37x}{6} - \tfrac{3}{8}x = 19 - 158\tfrac{1}{2}$$

oder $-\frac{253}{24}x = -139\tfrac{1}{2}$

folgl. $x = \frac{139\frac{1}{2} \cdot 24}{253} = 13\tfrac{59}{253}$

9. Gleichung.

$$8\tfrac{3}{4} + \frac{3x}{7} - \tfrac{5}{6} + 2x - \frac{12x}{5} + 13 + \frac{x}{4} = 0$$

Auflösung.

$$\frac{3x}{7} + 2x - \frac{12x}{5} + \frac{x}{4} = \tfrac{5}{6} - 8\tfrac{3}{4} - 13$$

$$\text{oder } \frac{39x}{140} = -\frac{251}{12}$$

$$\text{folgl. } x = -\frac{140 \cdot 251}{39 \cdot 12} = -75\tfrac{10}{117}$$

10. Gleichung.

$$\frac{3x}{5} - \frac{7x}{10} + \frac{3x}{4} - \frac{7x}{8} = -15$$

Auflösung.

$$-\frac{9x}{40} = -15$$

$$\text{folgl. } x = 66\tfrac{2}{3}$$

11. Gleichung.

$$3\tfrac{2}{3} - x - \frac{9x}{2} + 8 = -17 - \frac{3x}{5} + \tfrac{3}{2}x$$

Auflösung.

$$-x - \frac{9x}{2} + \frac{3x}{5} - \frac{3x}{2} = -17 - 3\tfrac{2}{3} - 8$$

$$\text{oder } -\frac{32x}{5} = -\tfrac{86}{3}$$

$$\text{folgl. } x = 4\tfrac{23}{48}$$

12. Gleichung.

$$\frac{x}{2} + \frac{x}{3} + \frac{x}{4} = 7x - 712 + \frac{x}{5}$$

Auflösung.

$$\frac{x}{2} + \frac{x}{3} + \frac{x}{4} - 7x - \frac{x}{5} = -712$$

$$\text{oder } -\frac{367x}{60} = -712$$

$$\text{folgl. } x = 116\tfrac{148}{367}$$

13. Gleichung.

$$11\tfrac{1}{2}x = \tfrac{11}{8}x + 66\tfrac{3}{8} - 5x - 9\tfrac{1}{4}$$

Auflösung.

$$11\tfrac{1}{2}x - \tfrac{11}{8}x + 5x = 66\tfrac{3}{8} - 9\tfrac{1}{4}$$

oder $\tfrac{121}{8}x = \tfrac{457}{8}$

folgl. $x = 3\tfrac{94}{121}$

14. Gleichung.

$$-\tfrac{16}{7}x = -\tfrac{1}{2}x + 412\tfrac{1}{2} - \tfrac{3}{5}x - 316\tfrac{1}{2}$$

Auflösung.

$$-\tfrac{16}{7}x + \tfrac{1}{2}x + \tfrac{3}{5}x = 412\tfrac{1}{2} - 316\tfrac{1}{2}$$

oder $-\dfrac{83x}{70} = 96$

folgl. $x = -80\tfrac{80}{83}$

15. Gleichung.

$$32\tfrac{1}{10}x + 176\tfrac{3}{4} - x = 19\tfrac{1}{3}x + 7345 - \frac{2x}{3}$$

Auflösung.

$$32\tfrac{1}{10}x - x - 19\tfrac{1}{3}x + \tfrac{2}{3}x = 7345 - 176\tfrac{3}{4}$$

oder $\dfrac{373x}{30} = \dfrac{28673}{4}$

folgl. $x = 576\tfrac{399}{746}$

16. Gleichung.

$$3{,}25x - 5{,}007 - x = 0{,}2 - 0{,}34x$$

Auflösung.

$$3{,}25x - x + 0{,}34x = 0{,}2 + 5{,}007$$

oder $2{,}59x = 5{,}207$

folgl. $x = 2{,}010424\ldots$

17. Gleichung.

$$13{,}2x - \frac{3x}{4} + 7{,}6953 = \frac{x}{5} + 7834{,}5$$

Auflösung.

$$13{,}2x - \frac{3x}{4} - \frac{x}{5} = 7834{,}5 - 7{,}6953$$

oder $12{,}25x = 7826{,}8047$

folgl. $x = 638{,}92283\ldots$

18. Gleichung.

$$\frac{7{,}53x}{18} + 100 = \frac{2x}{5} + 3{,}86 - \frac{x}{6}$$

Auflösung.

$$\frac{7{,}53x}{18} - \frac{2x}{5} + \frac{x}{6} = 3{,}86 - 100$$

oder $\frac{37x}{200} = -96{,}14$

folgl. $x = -519{,}67567$

19. Gleichung.

$$ax + c = d + bx$$

Auflösung.

$$ax - bx = d - c$$

oder $x(a - b) = d - c$

folgl. $x = \frac{d - c}{a - b}$

20. Gleichung.

$$\frac{f^2x}{cg} - \frac{a^2}{f} + cx = \frac{hx}{g} - c + (a + c)x$$

Auflösung.

$$\frac{f^2x}{cg} + cx - \frac{hx}{g} - ax - cx = \frac{a^2}{f} - c$$

$$\text{oder } x\left(\frac{f^2}{cg} + c - \frac{h}{g} - a - c\right) = \frac{a^2}{f} - c$$

$$x\left(\frac{f^2 - fhc - afcg}{fcg}\right) = \frac{a^2cg - c^2fg}{fcg}$$

$$x(f^2 - hc - acg)f = (a^2 - cf)cg$$

$$x = \frac{(a^2 - cf)cg}{(f^2 - hc - acg)f}$$

21. Gleichung.

$$x = a + \frac{bc}{d} + \frac{cfx}{de}$$

Auflösung.

$$x - \frac{cfx}{de} = a + \frac{bc}{d}$$

$$\text{oder } \frac{x(de - cf)}{de} = \frac{ade + bce}{de}$$

$$x(de - cf) = ade + bce$$

$$\text{folgl. } x = \frac{ade + bce}{de - cf} = \frac{(ad + bc)e}{de - cf}$$

22. Gleichung.

$$\frac{ex}{f} + \frac{cx}{d} + \frac{ax}{b} - g = h$$

Auflösung.

$$\frac{edbx + bcfx + afdx}{fdb} = \frac{gfdb + hfdb}{fdb}$$

$$\text{oder } x(edb + bcf + afd) = (h + g)fdb$$

$$\text{folgl. } x = \frac{(h+g)\,fdb}{b\,(ed+cf)+afd}$$

23. Gleichung.

$$\tfrac{5}{6}ab + \tfrac{4}{5}ac - \tfrac{2}{3}cx = \tfrac{3}{4}ac + 2ab - 6cx$$

Auflösung.

$$-\tfrac{2}{3}cx + 6cx = \tfrac{3}{4}ac - \tfrac{4}{5}ac + 2ab - \tfrac{5}{6}ab$$

$$\text{oder } \frac{16cx}{3} = -\frac{ac}{20} + \frac{7ab}{6}$$

$$16cx = \frac{21ab}{6} - \frac{3ac}{20}$$

$$x = \frac{21ab}{6 \cdot 16c} - \frac{3ac}{16 \cdot 20c} = \frac{7ab}{32c} - \frac{3ac}{320c}$$

$$= \frac{70ab - 3ac}{320c} = \frac{(70b - 3c)a}{320c}$$

24. Gleichung.

$$\frac{x}{a} - 1 - \frac{dx}{c} + 3ab = 0$$

Auflösung.

$$\frac{x}{a} - \frac{dx}{c} = 1 - 3ab$$

$$\text{oder } cx - adx = ac - 3a^2bc$$

$$x(c - ad) = ac(1 - 3ab)$$

$$\text{folgl. } x = \frac{ac(1 - 3ab)}{c - ad}$$

25. Gleichung.

$$\frac{ace}{d} - \frac{(a+b)^2x}{a} - bx = ae - 3bx$$

Auflösung.

$$\frac{(a+b)^2x}{a}+bx-3bx = -ae+\frac{ace}{d}$$

oder $$\frac{a^2x+2abx+b^2x+abx-3abx}{a} = \frac{ace-ade}{d}$$

$$x\ (a^2+2ab+b^2+ab-3ab) = \frac{a^2ce-a^2de}{d}$$

$$x\,(a^2+b^2) = \frac{a^2e(c-d)}{d}$$

folgl. $$x = \frac{a^2e(c-d)}{(a^2+b^2)d}$$

26. Gleichung.

$$\frac{a+3x}{4a}-\frac{7a-5x}{6b}+3-\frac{9x}{4}=\frac{x}{ab}+\frac{5x}{6b}$$

Auflösung.

$$\frac{a+3x}{4a}-\frac{7a-5x}{6b}-\frac{9x}{4}-\frac{x}{ab}\ d-\frac{5x}{6b}=-3$$

oder $$\frac{3x}{4a}+\frac{5x}{6b}-\frac{9x}{4}-\frac{x}{ab}-\frac{5x}{6b}=-3+\frac{7a}{6b}-\frac{1}{4}$$

$$x\ \left(\frac{3}{4a}-\frac{9}{4}-\frac{1}{ab}\right)=\frac{7a}{6b}-\frac{13}{4}$$

$$x\ \left(\frac{3b-9ab-4}{4ab}\right)=\frac{14a-39b}{12b}$$

folgl. $$x=\frac{(14a-39b)4ab}{12b(3b-9ab-4)}=\frac{56a^2b-156ab^2}{36b^2-108ab^2-48b}$$

$$=\frac{4b(14a^2-39ab)}{4b(9b-27ab-12)}=\frac{14a^2-39ab}{9b-27ab-12}\,*)$$

---

*) In den Aufgaben ist dieses Resultat mit den entgegengesetzten Zeichen angegeben, wodurch aber der Werth nicht verändert wird. Man sehe die Anmerk. zur 34. Auflösung.

27. Gleichung.

$$5a^3cx + ac^2x - 5abc^2 - 3a^3c^3$$
$$= 5a^2bcx + bc^2x - 3a^2c^3b - 5a^2c^2$$

Auflösung.

$$x(5a^3c + ac^2 - 5a^2bc - bc^2)$$
$$= 5abc^2 + 3a^3c^3 - 3a^2c^3b - 5a^2c^2$$

oder $x[ac(5a^2 + c) - bc(5a^2 + c)]$
$$= ac(3a^2c^2 - 5ac) - bc(3a^2c^2 - 5ac)$$
$$x[(ac - bc)(5a^2 + c)] = (ac - bc)(3a^2c^2 - 5ac)$$

folgl. $x = \frac{(ac - bc)(3a^2c^2 - 5ac)}{(ac - bc)(5a^2 + c)} = \frac{3a^2c^2 - 5ac}{5a^2 + c}$

28. Gleichung.

$$2a^2b^2c + ab^2x - 2ab^3c - abc^2d - 3a^3x$$
$$= (b^3 - 3a^2b)x - b^2c^2d$$

Auflösung.

$$x(ab^2 - 3a^3 - b^3 + 3a^2b)$$
$$= -2a^2b^2c + 2ab^3c + abc^2d - b^2c^2d$$

oder $x[3a^2(b-a) - b^2(b-a)] = 2ab^2c(b-a) - bc^2d(b-a)$
$$x[(3a^2 - b^2)(b - a)] = (2ab^2c - bc^2d)(b - a)$$

folgl. $x = \frac{(2ab^2c - bc^2d)(b - a)}{(3a^2 - b^2)(b - a)} = \frac{2ab^2c - bc^2d}{3a^2 - b^2}$

29. Gleichung.

$$\frac{ab}{x} = bc + d + \frac{1}{x}$$

Auflösung.

$$\frac{ab - 1}{x} = bc + d$$

oder $x\,(bc+d) = ab-1$

folgl. $x = \frac{ab-1}{bc+d}$

30. Gleichung.

$$\frac{3a+x}{x} - 5 = \frac{6}{x}$$

Auflösung.

$$\frac{3a+x-6}{x} = 5$$

oder $3a+x-6 = 5x$

$$4x = 3a-6$$

folgl. $x = \frac{3a-6}{4}$

31. Gleichung.

$$\frac{a^2x}{b-c} + dc = bx - ac$$

Auflösung.

$$bx - \frac{a^2x}{b-c} = dc + ac$$

oder $\frac{bx\,(b-c)-a^2x}{b-c} = \frac{(dc+ac)\;(b-c)}{b-c}$

$$x\,[b(b-c)-a^2] = c\,(a+d)\,(b-c)$$

folgl. $x = \frac{c\,(a+d)\,(b-c)}{b\,(b-c)-a^2}$

32. Gleichung.

$$c = a + \frac{m\,(a-x)}{3a+x}$$

Auflösung.

$$\frac{ma-mx}{3a+c} = c-a$$

oder $ma - mx = cx - ax + 3ac - 3a^2$

$$cx - ax + mx = ma - 3ac + 3a^2$$

$$x(c - a + m) = a\ (m - 3c + 3a)$$

folgl. $x = \frac{a\ (m - 3c + 3a)}{c - a + m}$

33. Gleichung.

$$\frac{a\ (d^2 + x^2)}{dx} = ac + \frac{ax}{d}$$

Auflösung.

$$\frac{ax^2 + ad^2}{dx} - \frac{ax}{d} = ac$$

oder $\frac{ax^2 + ad^2 - ax^2}{dx} = \frac{acdx}{dx}$

$$ad^2 = acdx$$

folgl. $x = \frac{ad^2}{acd} = \frac{d}{c}$

34. Gleichung.

$$\frac{cx^m}{a + bx} = \frac{fx^m}{d + ex}$$

Auflösung.

$$cx^m d + cex^{m+1} = fx^m a + bfx^{m+1}$$

oder, wenn man durchgehends mit x^m dividirt

$$cd + cex = af + bfx$$

$$x\ (ce - bf) = af - cd$$

folgl. $x = \frac{af - cd}{ce - bf} = \frac{cd - af}{bf - ce}$ *)

---

*) Man kann immer bei einem jeden Bruche die Zeichen des Zählers und Nenners in die entgegengesetzten verwandeln, weil der Bruch seinen Werth nicht verändert, wenn man Zähler und Nenner mit — 1 multiplicirt.

35. Gleichung.

$$\frac{7x^n}{x-1} = \frac{6x^{n+1} + x^n}{x+1} - \frac{3x^n + 6x^{n+2}}{x^2 - 1}$$

Auflösung.

Da $x^2 - 1 = x^2 - 1^2 = (x+1)(x-1)$, so ist $x^2 - 1$ durch $x - 1$ und $x + 1$ theilbar, folglich kann man $x^2 - 1$ als den Hauptnenner der ganzen Gleichung ansehen. Richtet man daher die Zähler wie gewöhnlich ein, und läßt den gemeinschaftlichen Nenner weg, so erhält man

$$7x^n + 7x^{n+1} = 6x^{n+2} + x^{n+1} - 6x^{n+1} - x^n - 3x^n - 6x^{n+2}$$

oder durch x^n dividirt,

$$7 + 7x = 6x^2 + x - 6x - 1 - 3 - 6x^2$$

oder $6x^2 - 6x^2 + x - 6x - 7x = 7 + 1 + 3$

$$-12x = 11 \text{ oder } 12x = -11$$

$$\text{folgl. } x = -\frac{11}{12}$$

36. Gleichung.

$$\frac{3a-5x}{a-c} + \frac{2a-x}{d} = \frac{a+f}{a-c} - dx$$

Auflösung.

Hier ist der Hauptnenner $= (a-c)d$

folgl. $(3a-5x)d + (2a-x)(a-c) = (a+f)d - (a-c)d^2x$

oder $3ad - 5dx + 2a^2 - 2ac - ax + cx$

$$= ad + fd - ad^2x + cd^2x$$

$$x(-5d - a + c + ad^2 - cd^2) = -2ad + fd - 2a^2 + 2ac$$

$$\text{folgl. } x = \frac{-2ad + fd - 2a^2 + 2ac}{-5d - a + c + ad^2 - cd^2} = \frac{d(f-2a) - 2a(a-c)}{(a-c)(d^2-1) - 5d}$$

37. Gleichung.

$$\frac{a}{bx}+\frac{c}{dx}+\frac{e}{fx}+\frac{g}{hx}=k$$

Auflösung.

$$adfh + bcfh + bdeh + bdfg = kbdfhx$$

$$\text{folgl. } x = \frac{adfh + bcfh + bdeh + bdfg}{kbdfd}$$

38. Gleichung.

$$\frac{3abc}{a+b}+\frac{a^2b^2}{(a+b)^3}+\frac{(2a+b)b^2x}{a(a+b)^2}=3cx+\frac{bx}{a}$$

Auflösung.

Es ist einleuchtend, daß der Hauptnenner $a(a+b)^3$ ist. Dividirt man also mit den einzelnen Nennern in $a(a+b)^3$, und multiplicirt sämmtliche Zähler mit den Quotienten, so ist

$$3a^2bc\,(a+b)^2 + a^3b^2 + (2a+b)\,b^2\,(a+b)x$$
$$= 3ac\,(a+b)^3x + b\,(a+b)^3\,x$$
$$\text{oder } [3ac(a+b)^3 + b(a+b)^3 - (2a+b)\,b^2\,(a+b)]\,x$$
$$= 3a^2bc(a+b)^2 + a^3b^2$$
$$(a+b)\,[3ac\,(a+b)^2 + b\,(a+b)^2 - (2a+b)b^2]\,x$$
$$= ab\,[3ac\,(a+b)^2 + a^2b]$$
$$(a+b)(3a^3c+6a^2bc+3ab^2c+a^2b+2ab^2+b^3-2ab^2-b^3)x$$
$$= ab\,(3a^3c + 6a^2bc + 3ab^2c + a^2b)$$
$$(a+b)\,(3a^3c + 6a^2bc + 3ab^2c + a^2b)x$$
$$= ab\,(3a^3c + 6a^2bc + 3ab^2c + a^2b)$$
$$\text{folgl. } x = \frac{ab(3a^3c+6a^2bc+3ab^2c+a^2b)}{(a+b)(3a^3c+6a^2bc+3ab^2c+a^2b)} = \frac{ab}{a+b}$$

39. Gleichung.

$$\frac{bx}{2b-a}-\frac{(3bc+ad)x}{2ab(a+b)}-\frac{5ab}{3c-d}=\frac{(3bc-ad)x}{2ab(a-b)}-\frac{5a(2b-a)}{a^2-b^2}$$

Auflösung.

Setzt man $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$, so siehet man leicht, daß der Hauptnenner in dieser Gleichung $= 2ab(2b - a)(3c - d)(a^2 - b^2)$ ist, indem dieser Ausdruck durch die einzelnen Nenner theilbar ist. Versiehet man daher die Gleichung mit diesem Hauptnenner, und richtet hernach auf die gewöhnliche Art die Zähler ein, so erhält man:

$$2ab^2(3c-d)(a^2-b^2)x-(3bc+ad)(2b-a)(3c-d)(a-b)x-10a^2b^2(2b-a)(a^2-b^2)$$
$$=(3bc-ad)(2b-a)(3c-d)(a+b)x-10a^2b(2b-a)^2(3c-d)$$

Man bringe die Größen, worin x ist, auf eine Seite

$$(3bc-ad)(2b-a)(3c-d)(a+b)x+(3bc+ad)(2b-a)(3c-d)(a-b)x-2ab^2(3c-d)(a^2-b)^2x$$
$$=-10a^2b^2(2b-a)(a^2-b^2)+10a^2b(2b-a)^2(3c-d)$$

Auf der linken Seite der Gleichung werfe man den gemeinschaftlichen Faktor $(3c - d)x$, und auf der rechten Seite den Faktor $5a(2b - a)$ heraus; so ist

$$[(3bc-ad)(2b-a)(a+b)+(3bc+ad)(2b-a)(a-b)-2ab^2(a^2-b^2)](3c-d)x$$
$$=[-2ab^2(a^2-b^2)+2ab(3c-d)(2b-a)]\,5a(2b-a)$$

Verrichtet man nun auf beiden Seiten der Gleichung

die Multiplikation der in den Haken eingeschloßnen Größen wirklich, so erhält man:

$$x\,(3c-d)\,(12ab^2c+2a^2bd-6a^2bc$$
$$-4ab^2d-2a^3b^2+2ab^4)$$
$$=5a\,(2b-a)\,(12ab^2c+2a^2bd-6a^2bc$$
$$-4ab^2d-2a^3b^2+2ab^4)$$

$$\text{folgl. } x=\frac{\left\{\begin{matrix}5a\,(2b-a)\,(12ab^2c+2a^2bd-6a^2bc\\ -4ab^2d-2a^3b^2+2ab^4)\end{matrix}\right\}}{\left\{\begin{matrix}(3c-d)\,(12ab^2c+2a^2bd-6a^2bc\\ -4ab^2d-2a^3b^2+2ab^4)\end{matrix}\right\}}$$

$$=\frac{5a\,(2b-a)}{3c-d}$$

40. Gleichung.

$$(a+x)\,(b+x)-a(b+c)=\frac{a^2c}{b}+x^2$$

Auflösung.

$$ab+bx+ax+x^2-x^2=ab+ac+\frac{a^2c}{b}$$

$$\text{oder } (b+a)x=\frac{abc+a^2c}{b}$$

$$\text{folgl. } x=\frac{ac(b+a)}{b(b+a)}=\frac{ac}{b}$$

41. Gleichung.

$$\sqrt[m]{x}=a$$

Auflösung.

$$(\sqrt[m]{x})^m=a^m$$

$$\text{folgl. } x=a^m.$$

42. Gleichung.

$$\sqrt[m]{(ax+b)} = \sqrt[m]{(cx+d)}$$

Auflösung.

Erhebt man beide Theile der Gleichung zur mten Potenz, so erhält man

$$[\sqrt[m]{(ax+b)}]^m = [\sqrt[m]{(cx+d)}]^m$$

oder $ax+b = cx+d$

folgl. $x = \frac{d-b}{a-c}$

43. Gleichung.

$$h \sqrt[3]{(ax-b)} = k \sqrt[3]{(cx+dx-f)}$$

Auflösung.

Man erhebe beide Ausdrücke der Gleichung zur 3ten Potenz, so ist

$$h^3 (ax-b) = k^3 (cx+dx-f)$$

oder $h^3ax - h^3b = k^3cx + k^3dx - k^3f$

$$x (h^3a - k^3c - k^3d) = h^3b - k^3f$$

folgl. $x = \frac{bh^3 - fk^3}{ah^3 - (c+d) k^3}$

44. Gleichung.

$$\sqrt[3]{(a^2+c)} = \sqrt[4]{\frac{a^2+c}{d(x+g)}}$$

Auflösung.

$$\sqrt[3]{(a^2+c)} = \frac{\sqrt[4]{(a^2+c)}}{\sqrt[4]{d(x+g)}}$$

$$\sqrt[4]{d(x+g)} = \frac{\sqrt[4]{(a^2+c)}}{\sqrt[3]{(a^2+c)}}$$

Erhebt man beide Theile der Gleichung zur vierten Potenz, so erhält man

$$dx + dg = \frac{a^2 + c}{\sqrt[3]{(a^2 + c)^4}} = \frac{a^2 + c}{(a^2 + c)^{\frac{4}{3}}}$$

$$= \frac{a^2 + c}{(a^2 + c)\ (a^2 + c)^{\frac{1}{3}}} = \frac{1}{(a^2 + c)^{\frac{1}{3}}}$$

oder $dx = \frac{1}{\sqrt[3]{(a^2 + c)}} - dg$

folgl. $x = \frac{\frac{1}{\sqrt[3]{(a^2 + c)}} - dg}{d} = \frac{1}{d\sqrt[3]{(a^2 + c)}} - g$

45. Gleichung.

$$\sqrt[m]{(a + x)} = \sqrt[2m]{(x^2 + 5ax + b^2)}$$

Auflösung.

Es ist einleuchtend, daß $\sqrt[m]{(a + x)} = \sqrt[2m]{(a + x)^2}$ *)
Es ist daher

$$\sqrt[2m]{(a + x)^2} = \sqrt[2m]{(x^2 + 5ax + b^2)}$$

Erhebet man die Gleichung zur 2mten Potenz, so ist

$$(a + x)^2 = x^2 + 5ax + b^2$$

oder $a^2 + 2ax + x^2 = x^2 + 5ax + b^2$

$$2ax + x^2 - 5ax - x^2 = b^2 - a^2$$

$$- 3ax = b^2 - a^2$$

*) Weil nämlich $\sqrt[m]{(a + x)} = (a + x)^{\frac{1}{m}}$
und $\sqrt[2m]{(a + x)^2} = (a + x)^{\frac{2}{2m}} = (a + x)^{\frac{1}{m}}$

$$\text{folgl. } x = \frac{b^2 - a^2}{-3a} = \frac{a^2 - b^2}{3a}$$

46. Gleichung.

$$c + b \sqrt[m]{(x + d)} = f$$

Auflösung.

$$b \sqrt[m]{(x + d)} = f - c$$

$$\text{oder } b^m (x + d) = (f - c)^m$$

$$b^m x + b^m d = (f - c)^m$$

$$b^m x = (f - c)^m - b^m d$$

$$\text{folgl. } x = \frac{(f - c)^m - b^m d}{b^m} = \left(\frac{f - c}{b}\right)^m - d$$

47. Gleichung.

$$\frac{ax}{b} \sqrt{(f^2 x^2 + d^2)} + \frac{afx^2}{b} = cx$$

Auflösung.

Wird die Gleichung durch x dividirt, so erhält man

$$\frac{a}{b} \sqrt{(f^2 x^2 + d^2)} + \frac{afx}{b} = c$$

$$\text{oder } \frac{a}{b} \sqrt{(f^2 x^2 + d^2)} = c - \frac{afx}{b} \text{ *)}$$

Erhebt man die Gleichung zum Quadrat, so ist:

*) Man schafft hier $\frac{afx}{b}$ auf die andere Seite, damit, wenn man beide Theile der Gleichung quadrirt, das Wurzelzeichen wegfalle.

$$\frac{a^2}{b^2}(f^2x^2+d^2)=\left(\frac{bc-afx}{b}\right)^2$$

oder $$\frac{a^2f^2x^2}{b^2}+\frac{a^2d^2}{b^2}=\frac{b^2c^2-2abcfx+a^2f^2x^2}{b^2}$$

$$a^2d^2=b^2c^2-2abcfx$$

$$2abcfx=b^2c^2-a^2d^2$$

folgl. $$x=\frac{b^2c^2-a^2d^2}{2abcf}=\frac{(bc+ad)(bc-ad)}{2abcf}$$ *)

48. Gleichung.

$$a^x=b$$

Auflösung.

$$\log.\ a^x=\log.\ b$$

oder $$x\log.\ a=\log.\ b$$

folgl. $$x=\frac{\log.\ b}{\log.\ a}$$

49. Gleichung.

$$a^{mx}b^{nx}=c$$

Auflösung.

$$mx\log.\ a+nx\log.\ b=\log.\ c$$

oder $$x(m\log.\ a+n\log.\ b)=\log.\ c$$

folgl. $$x=\frac{\log.\ c}{m\log.\ a+n\log.\ b}=\frac{\log.\ c}{\log.\ a^m+\log.\ b^n}$$

$$=\frac{\log.\ c}{\log.\ a^mb^n}$$

---

*) Diese Verwandlung gründet sich darauf, daß das Produkt aus der Summe zweier Größen in ihre Differenz der Differenz ihrer Quadrate gleich ist.

50. Gleichung.

$$a^{mx+f}b^{nx+g} = c^{px+h}d^{qx+k}$$

Auflösung.

$$(mx + f) \log. a + (nx + g) \log. b$$
$$= (px + h) \log. c + (qx + k) \log. d$$

oder $mx \log. a + f \log. a + nx \log. b + g \log. b$
$$= px \log. c + h \log. c + qx \log. d + k \log. d$$

$$mx \log. a + nx \log. b - px \log. c - qx \log. d$$
$$= h \log. c + k \log. d - f \log. a - g \log. b$$

$$x (m \log. a + n \log. b - p \log. c - q \log. d)$$
$$= h \log. c + k \log. d - f \log. a - g \log. b$$

folgl. $x = \frac{h \log. c + k \log. d - f \log. a - g \log. b}{m \log. a + n \log. b - p \log. c - q \log. d}$

$$= \frac{\log. c^h + \log. d^k - \log. a^f - \log. b^g}{\log. a^m + \log. b^n - \log. c^p - \log. d^q}$$

$$= \frac{\log. \frac{c^h d^k}{a^f b^g}}{\log. \frac{a^m b^n}{c^p d^q}} = \left(\log. \frac{c^h d^k}{a^f b^g}\right) : \left(\log. \frac{a^m b^n}{c^p d^q}\right)$$

51. Gleichung.

$$3^x = 177147$$

Auflösung.

$$x \,.\, \log. 3 = \log. 177147$$

oder $x \,.\, 0{,}4771213 = 5{,}2483338$

folgl. $x = \frac{5{,}2483338}{0{,}4771213} = 11$ beinahe

52. Gleichung.

$$2^x = 769$$

Auflösung.

$$x \log. 2 = \log. 769$$

oder $x \,.\, 0{,}3010300 = 2{,}8859263$

folgl. $x = \frac{2{,}8859263}{0{,}3010300} = 9{,}586839\ldots$

53. Gleichung.

$$\left(\frac{3}{4}\right)^x = 51\tfrac{1}{2}$$

Auflösung.

$$x\,(\log. 3 - \log. 4) = \log. \frac{103}{2} = \log. 103 - \log. 2$$

folgl. $x = \frac{\log. 103 - \log. 2}{\log. 3 - \log. 4}$

$$= \frac{2{,}0128372 - 0{,}3010300}{0{,}4771213 - 0{,}6020600}$$

$$= \frac{1{,}7118072}{-\ 0{,}1249387} = -\ 13{,}701176\ldots$$

54. Gleichung.

$$\left(\frac{756}{345}\right)^{\frac{3x}{2}} = 54783$$

Auflösung.

$$\frac{3x}{2}\,(\log. 756 - \log. 345) = \log. 54783$$

folgl. $x = \frac{\log. 54783}{\frac{3}{2}\,(\log. 756 - \log. 345)}$

$$= \frac{4{,}7386458}{0{,}5110540} = 9{,}272299\ldots$$

55. Gleichung.

$$\left(\frac{21}{20}\right)^{x} \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^{\frac{7x}{2}} = \frac{7}{12}$$

Auflösung.

$$x(\log. 21 - \log. 20) + \tfrac{7}{2}x(\log. 3 - \log. 5) = \log. 7 - \log. 12$$

folgl. $x = \dfrac{\log.\ 7 - \log.\ 12}{\log.\ 21 - \log.\ 20 + \frac{7}{2}\ (\log. 3 - \log.\ 5)}$

$$= \frac{-0{,}2340832}{-0{,}7552811} = 0{,}309928\ldots$$

56. Gleichung.

$$\left(\frac{295}{867}\right)^{3-x} = 632 \cdot \left(\frac{56}{39}\right)^{\frac{5x}{9}}$$

Auflösung.

$$(3 - x)\ (\log. 295 - \log. 867)$$
$$= \log. 632 + \tfrac{5}{9}x\ (\log. 56 - \log. 39)$$

oder $-\ x\ (\log. 295 - \log. 867) - \frac{5}{9}x\ (\log. 56 - \log. 39)$
$$= \log. 632 - 3\ (\log. 295 - \log. 867)$$

$x\ [(-\log. 295 + \log. 867) - \frac{5}{9}\ (\log. 56 - \log. 39)]$
$$= \log. 632 - 3\ (\log. 295 - \log. 867)$$

folgl. $x = \dfrac{\log. 632 - 3\ (\log. 295 - \log. 867)}{\log. 867 - \log. 295 - \frac{5}{9}\ (\log. 56 - \log. 39)}$

$$= \frac{2{,}8007171 + 1{,}4045913}{2{,}9380191 - 2{,}4698220 - 0{,}0872908}$$

$$= \frac{4{,}2053084}{0{,}3809063} = 11{,}040270\ldots$$

57. Gleichung.

$$3^{2x} \cdot 5^{6x-7} = 9^{x-2} \cdot 7^{1-x}$$

Auflösung.

$$2x \log. 3 + (6x-7) \log. 5 = (x-2) \log. 9 + (1-x) \log. 7$$

oder $2x \cdot \log. 3 + 6x \cdot \log. 5 - x \cdot \log. 9 + x \cdot \log. 7$

$$= 7 \log. 5 - 2 \log. 9 + \log. 7$$

folgl. $x = \dfrac{7 \log. 5 - 2 \log. 9 + \log. 7}{2 \log. 3 + 6 \log. 5 - \log. 9 + \log. 7}$

$$= \frac{4,8927900 - 1,9084850 + 0,8450980}{0,9542426 + 4,1938200 - 0,9542425 + 0,8450980}$$

$$= \frac{3,8294030}{5,0389181} = 0,759965\ldots$$

II.

Auflösungen der Gleichungen vom ersten Grade mit mehreren unbekannten Größen.

---

1. Gleichung.

$$x + y = a$$
$$x - y = b$$

Auflösung.

Addirt man beide Gleichungen, so erhält man

$$2x = a + b$$

folgl. $x = \frac{a + b}{2}$

Subtrahirt man beide Gleichungen, so erhält man

$$2y = a - b$$

folgl. $y = \frac{a - b}{2}$

2. Gleichung.

I. $3x + 2y = 118$

II. $x + 5y = 191$

Auflösung.

Multiplicirt man die Gleichung (II.) mit 3, so erhält man $3x + 15y = 573$. Ziehet man von dieser die Gleichung (I.) ab, so bleibt

$$13y = 455$$

folgl. $y = 35$

Hieraus ergiebt sich

$$x = 16$$

3. Gleichung.

$$\text{I.}\quad 7x + \tfrac{5}{2}y = 411\tfrac{1}{2}$$

$$\text{II.}\quad 39x - 14y = -935\tfrac{9}{10}$$

Auflösung.

Multiplicirt man die Gleichung (I.) mit 39 und (II.) mit 7, so erhält man zwei andere Gleichungen

$$\text{III.}\quad 273x + 97\tfrac{1}{2}y = 16048\tfrac{1}{2}$$

$$\text{IV.}\quad 273x - 98y = -6551\tfrac{3}{10}$$

Subtrahirt man (IV.) von (III.), so bleibt

$$195\tfrac{1}{2}y = 22599\tfrac{4}{5}$$

folgl. $y = \dfrac{22599\frac{4}{5}}{195\frac{1}{2}} = \dfrac{225998}{1955} = 115\tfrac{3}{5}$ *)

Substituirt man diesen Werth von y in (I.) oder (II.), so erhält man $x = 17\tfrac{1}{2}$

4. Gleichung.

$$\text{I.}\quad 5x - 8\tfrac{1}{2} = 7y - 44$$

$$\text{II.}\quad 2x = y + \tfrac{5}{7}$$

Auflösung.

Man verwandele beide Gleichungen in folgende:

$$\text{III.}\quad 5x - 7y = -35\tfrac{1}{2}$$

$$\text{IV.}\quad 2x - y = \tfrac{5}{7}$$

Multiplicirt man (IV.) mit 7, so erhält man

$$14x - 7y = 5$$

hiervon (III.) abgezogen, giebt

*) Der größte allgemeine Theiler ist 391.

$$9x = 40\frac{1}{2}$$

folgl. $x = 4\frac{1}{2}$

und $y = 8\frac{3}{7}$

5. Gleichung.

I. $5\frac{3}{4}y - 11x = 4y + 117\frac{1}{8}$

II. $8x + 175 = 2y$

Auflösung.

Man verwandle beide Gleichungen in folgende:

III. $1\frac{3}{4}y - 11x = 117\frac{1}{8}$

IV. $-2y + 8x = -175$

Multiplicirt man nun die Gleichung (III.) mit 8 und (IV.) mit 11, so erhält man

V. $14y - 88x = 937$

VI. $-22y + 88x = -1925$

Addirt man beide Gleichungen, so ist

$$-8y = -988$$

folgl. $y = 123\frac{1}{2}$

und $x = 9$

6. Gleichung.

I. $7y = 2x - 3y$

II. $19x = 60y + 621\frac{1}{4}$

Auflösung.

Aus der Gleichung (I.) ergiebt sich, daß $x = 5y$. Substituirt man diesen Werth von x in (II.), so erhält man

$$35y = 621\frac{1}{4}$$

folgl. $y = 17\frac{3}{4}$
und $x = 88\frac{3}{4}$

7. Gleichung.

$$\text{I. } 13x + 7y - 341 = 7\tfrac{1}{2}y + 43\tfrac{1}{2}x$$
$$\text{II. } 2x + \tfrac{1}{2}y = 1$$

Auflösung.

Die Gleichung (I) verwandle man in

$$\tfrac{1}{2}y + 30\tfrac{1}{2}x = -341$$

und ziehe davon (II.) ab, so erhält man

$$28\tfrac{1}{2}x = -342$$

folgl. $x = -12$
und $y = 50$

8. Gleichung.

$$\text{I. } 113\tfrac{1}{2}x - 27\tfrac{5}{7}y = 10y + 5488\tfrac{4}{7}$$
$$\text{II. } 9y - 347 = 5x - 420$$

Auflösung.

Man verwandle beide Gleichungen in folgende:

$$\text{III. } 113\tfrac{1}{2}x - 37\tfrac{5}{7}y = 5488\tfrac{4}{7}$$
$$\text{IV. } -5x + 9y = -73$$

Multiplicirt man die Gleichung (III.) mit 5, und (IV.) mit $113\frac{1}{2}$, so erhält man

$$\text{V. } 567\tfrac{1}{2}x - 188\tfrac{4}{7}y = 27442\tfrac{6}{7}$$
$$\text{VI. } -567\tfrac{1}{2}x + 1021\tfrac{1}{2}y = -8285\tfrac{1}{2}$$

Addirt man beide Gleichungen, so ist

$$832\tfrac{13}{14}y = 19157\tfrac{5}{14}$$

folgl. $y = 23$
und $x = 56$

9. Gleichung.

I. $168\frac{15}{44} - 19x + \frac{3}{11}y = 12\frac{3}{4}x + 1084$

II. $\frac{1}{3}x - 149\frac{1}{2} = 319\frac{2}{9} - \frac{7}{2}y$

Auflösung.

Man verwandle beide Gleichungen in folgende:

III. $\frac{3}{11}y - 31\frac{3}{4}x = 915\frac{29}{44}$

IV. $\frac{7}{2}y + \frac{1}{3}x = 468\frac{13}{18}$

Multiplicirt man nun die Gleichung (III.) mit $\frac{7}{2}$ und (IV.) mit $\frac{3}{11}$, so erhält man

V. $\frac{21}{22}y - 111\frac{1}{8}x = 3204\frac{71}{88}$

VI. $\frac{21}{22}y + \frac{1}{11}x = 127\frac{5}{6}$

Subtrahirt man (VI.) von (V.), so ist

$- 111\frac{19}{88}x = 3076\frac{257}{264}$

folgl. $x = -27\frac{2}{3}$

und $y = 136\frac{5}{9}$

10. Gleichung.

I. $x + y = 18{,}73$

II. $0{,}56x + 13{,}421y = 763{,}4$

Auflösung.

Multiplicirt man (I.) mit 0,56, so erhält man

$0{,}56x + 0{,}56y = 10{,}4888$

Subtrahirt man diese Gleichung von (II.), so ist

$12{,}861y = 752{,}9112$

folgl. $y = 58{,}5421\ldots$

und $x = -39{,}8121\ldots$

11. Gleichung.

I. $(x+5)(y+7) = (x+1)(y-9) + 112$

II. $2x + 10 = 3y + 1$

Auflösung.

Man schaffe in der Gleichung (I.) die Klammern durch die wirkliche Multiplication weg, so erhält man

$$xy + 5y + 7x + 35 = xy + y - 9x - 9 + 112$$

Es lassen sich daher die Gleichungen (I.) und (II.)

$$\text{in III.} \quad 4y + 16x = 68$$

$$\text{und IV.} \quad -3y + 2x = -9$$

verwandeln. Multiplicirt man nun (IV.) mit 8, so erhält man

$$-24y + 16x = -72$$

Subtrahirt man hiervon (III.), so hat man

$$-28y = -140$$

und hieraus $y = 5$; mithin $x = 3$

12. Gleichung.

$$\text{I.} \quad ax = by$$

$$\text{II.} \quad x + y = c$$

Auflösung.

Man verwandle (I.) in

$$\text{III.} \quad ax - by = 0$$

und multiplicire (II.) mit a, so erhält man

$$\text{IV.} \quad ax + ay = ac$$

Subtrahirt man (III.) von (IV.), so bleibt

$$ay + by = ac$$

$$\text{oder } y\,(a + b) = ac$$

$$\text{folgl. } y = \frac{ac}{a+b}$$

$$\text{und } x = c - y = \frac{bc}{a+b}$$

13. Gleichung.

I. $ax + by = c$

II. $fx + gy = h$

Auflösung.

Man multiplicire (I.) mit f und (II.) mit a, so erhält man

III. $afx + bfy = cf$

IV. $afx + agy = ah$

Subtrahirt man (III.) von (IV.), so bleibt

$$agy - bfy = ah - cf$$

$$\text{folgl. } y = \frac{ah - cf}{ag - bf}$$

$$\text{und daher } x = \frac{c - by}{a} = \frac{cg - bh}{ag - bf}$$

14. Gleichung.

I. $\frac{a}{b + y} = \frac{b}{3a + x}$

II. $ax + 2by = d$

Auflösung.

Man schaffe in (I.) die Nenner fort, so ist

$$ax + 3a^2 = by + b^2$$

$$\text{oder } ax - by = b^2 - 3a^2$$

Subtrahirt man diese Gleichung von (II.), so bleibt

$$3by = 3a^2 - b^2 + d$$

$$\text{folgl. } y = \frac{3a^2 - b^2 + d}{3b}$$

$$\text{und daher } x = \frac{d - 2by}{a} = \frac{2b^2 - 6a^2 + d}{3a}$$

15. Gleichung.

$$\text{I.}\quad bcx = cy - 2b$$

$$\text{II.}\quad b^2y + \frac{a(c^3 - b^3)}{bc} = \frac{2b^3}{c} + c^3x$$

Auflösung.

Man schaffe in (II.) die Nenner weg, indem man die ganze Gleichung mit bc multiplicirt, und bringe die unbekannten Größen auf eine Seite, so erhält man

$$\text{III.}\quad -bc^4x + b^3cy = -ac^3 + ab^3 + 2b^4$$

Man multiplicire ferner (I.) mit c^3, so ist

$$\text{IV.}\quad bc^4x - c^4y = -2bc^3$$

Addirt man nun die Gleichungen (III.) und (IV.), so erhält man

$$y(b^3c - c^4) = 2b^4 - ac^3 + ab^3 - 2bc^3$$

$$\text{folgl. } y = \frac{2b^4 - ac^3 + ab^3 - 2bc^3}{b^3c - c^4}$$

$$= \frac{2b(b^3 - c^3) + a(b^3 - c^3)}{c(b^3 - c^3)}$$

$$= \frac{(2b + a)(b^3 - c^3)}{c(b^3 - c^3)} = \frac{a + 2b}{c}$$

Substituirt man diesen Werth für y in (I.), so ist

$$x = \frac{\frac{c(a + 2b)}{c} - 2b}{bc} = \frac{a}{bc}$$

16. Gleichung.

$$\text{I.}\quad 3x + 5y = \frac{(8b - 2f)\,bf}{b^2 - f^2}$$

$$\text{II.}\quad b^2 x - \frac{bcf^2}{b+f} + (b+c+f)\, fy = f^2x + (b+2f)\, bf$$

Auflösung.

Man verwandle die Gleichungen (I.) und (II.) in

$$\text{III.}\quad 3\,(b^2 - f^2)\, x + 5\,(b^2 - f^2)\, y = (8b - 2f)\, bf$$

$$\text{IV.}\quad (b^2 - f^2)\, x + (b+c+f)fy = (b+2f)bf + \frac{bcf^2}{b+f}$$

multiplicire (IV.) mit 3, welches

$$\text{V.}\ 3(b^2 - f^2)x + 3(b+c+f)\, fy = 3(b+2f)\, bf + \frac{3bcf^2}{b+f}$$

giebt, und subtrahire (V.) von (III.), so bleibt

$$(5b^2 - 5f^2 - 3bf - 3cf - 3f^2)\, y$$

$$= [(8b - 2f) - 3\,(b+2f)]\, bf - \frac{3bcf^2}{b+f}$$

$$= (5b - 8f)\, bf - \frac{3cf}{b+f}\, bf$$

oder $(5b^2 - 8f^2 - 3bf - 3cf)\, y$

$$= \frac{(5b^2 - 3bf - 8f^2 - 3cf)}{b+f}\, bf$$

$$\text{folgl.}\ y = \frac{(5b^2 - 3bf - 8f^2 - 3cf)\, bf}{(5b^2 - 3bf - 8f^2 - 3cf)\,(b+f)} = \frac{bf}{b+f}$$

Substituirt man diesen Werth für y in (III.), so ist

$$3\,(b^2 - f^2)\, x + 5\,(b - f)\, bf\,^{*)} = (8b - 2f)\, bf$$

$$\text{oder}\ 3\,(b^2 - f^2)\, x = 3\,(b+f)\, bf$$

$$\text{folgl.}\ x = \frac{3\,(b+f)\, bf}{3\,(b^2 - f^2)} = \frac{3\,(b+f)\, bf}{3\,(b+f)\,(b-f)}$$

$$= \frac{bf}{b-f}$$

---

*) Weil nämlich $b^2 - f^2$ aus den Faktoren $(b+f)\,(b-f)$ zusammen gesetzt ist.

17. Gleichung.

I. $x+y = 10$

II. $x+z = 19$

III. $y+z = 23$

Auflösung.

Subtrahirt man (I.) von (II.), so bleibt

IV. $z-y = 9$

Addirt man (IV.) und (III.), so erhält man

$2z = 32$

folgl. $z = 16$; und daher $x = 3$; $y = 7$

18. Gleichung.

I. $x+y+z = 29\frac{1}{4}$

II. $x+y-z = 18\frac{1}{4}$

III. $x-y+z = 13\frac{3}{4}$

Auflösung.

Subtrahirt man (II.) von (I.), so erhält man

$2z = 11$, folgl. $z = 5\frac{1}{2}$

Subtrahirt man (III.) von (I.), so bleibt

$2y = 15\frac{1}{2}$; folgl. $y = 7\frac{3}{4}$

mithin ist $x = 16$

19. Gleichung.

I. $x+y+z = a$

II. $my = nx$

III. $pz = qx$

Auflösung.

Aus (II.) ergiebt sich $y = \frac{nx}{m}$

Aus (III.) ergiebt sich $z = \frac{qx}{p}$

Substituirt man diese Werthe für y und z in (I.), so erhält man

$$x + \frac{nx}{m} + \frac{qx}{p} = a$$

oder $x\,(pm + pn + qm) = amp$

folgl. $x = \frac{amp}{pm + pn + qm}$

Substituirt man diesen Werth für x in (II.), so erhält man

$$my = n\,\frac{amp}{pm + pn + qm}$$

folgl. $y = \frac{namp}{m\,(pm + pn + qm} = \frac{anp}{pm + pn + qm}$

Auf gleiche Art findet man durch (III.)

$$z = \frac{amq}{pm + pn + qm}$$

20. Gleichung.

I. $3x + 5y = 161$
II. $7x + 2z = 209$
III. $2y + z = 89$

Auflösung.

Man multiplicire (III.) mit 2, so erhält man

IV. $4y + 2z = 178$

Diese Gleichung ziehe man von (II.) ab, so bleibt

V. $7x - 4y = 31$

Nun multiplicire man (I.) mit 7 und (V.) mit 3, so giebt dieses

$$\text{VI.}\quad 21x + 35y = 1127$$

$$\text{VII.}\quad 21x - 12y = 93$$

Endlich subtrahire man (VII.) von (VI.), so bleibt

$$47y = 1034$$

folgl. $y = 22$; und hieraus ferner $x = 17$; $z = 45$

21. Gleichung.

$$\text{I.}\quad y + \tfrac{1}{2}x = 41$$

$$\text{II.}\quad x + \tfrac{1}{4}z = 20\tfrac{1}{2}$$

$$\text{III.}\quad y + \tfrac{1}{5}z = 34$$

Auflösung.

Man subtrahire (III.) von (I.), so bleibt

$$\text{IV.}\quad \tfrac{1}{2}x - \tfrac{1}{5}z = 7$$

Nun multiplicire man (II.) mit $\tfrac{1}{2}$, wodurch man

$$\text{V.}\quad \tfrac{1}{2}x + \tfrac{1}{8}z = 10\tfrac{1}{4}$$

erhält. Subtrahirt man ferner (IV.) von (V.), so bleibt

$$\tfrac{13}{40}z = \tfrac{13}{4}$$

folgl. $z = 10$; und daher $x = 18$; $y = 32$

22. Gleichung.

$$\text{I.}\quad ax + by = c$$

$$\text{II.}\quad dx + ey = f$$

$$\text{III.}\quad gy + hz = l$$

Auflösung.

Multiplicirt man (I.) mit e und (II.) mit b, so erhält man

$$\text{IV.}\quad aex + bey = ce$$
$$\text{V.}\quad bdx + bey = bf$$

Man subtrahire (V.) von (IV.), so bleibt

$$x\,(ae - bd) = ce - bf$$

$$\text{folgl. } x = \frac{ce - bf}{ae - bd}$$

Substituirt man diesen Werth für x in (II.), so ist

$$y = \frac{f - \dfrac{d\,(ce - bf)}{ae - bd}}{e}$$

$$= \frac{aef - bdf - cde + bdf}{e\,(ae - bd)}$$

$$= \frac{af - cd}{ae - bd}$$

Substituirt man endlich den Werth von y in (III.), so findet man

$$z = \frac{l - \dfrac{g\,(af - cd)}{ae - bd}}{h}$$

$$= \frac{ael - bdl - afg + cdg}{h\,(ae - bd)} = \frac{a\,(el - fg) - d\,(bl - cg)}{h\,(ae - bd)}$$

23. Gleichung.

$$\text{I.}\quad 53 - \tfrac{1}{2}x - \tfrac{1}{2}z = y - 109$$
$$\text{II.}\quad \tfrac{1}{4}x + \tfrac{1}{8}y = 26$$
$$\text{III.}\quad 5y = 4z$$

Auflösung.

Man verwandle zuvörderst die Gleichung (I.) in

$$\text{IV.}\quad y + \tfrac{1}{2}x + \tfrac{1}{2}z = 162$$

und (III.) in

$$\text{V.}\quad 5y - 4z = 0$$

Alsdann multiplicire man (IV.) mit $\frac{1}{2}$, welches

$$\tfrac{1}{2}y + \tfrac{1}{4}x + \tfrac{1}{4}z = 81$$

giebt. Subtrahirt man hiervon (II.), so bleibt

$$\tfrac{3}{8}y + \tfrac{1}{4}z = 55$$

Diese Gleichung multiplicire man ferner mit 16. Dieses giebt

$$6y + 4z = 880$$

hierzu addire man (V.), so erhält man

$$11y = 880$$

$$\text{folgl. } y = 80;\ x = 64;\ z = 100$$

24. Gleichung.

$$\text{I.}\quad 2x - \tfrac{3}{4}y = 93 - \tfrac{1}{2}x - \tfrac{1}{4}y$$

$$\text{II.}\quad 7x - 5z = y + x - 86$$

$$\text{III.}\quad \tfrac{1}{2}x + \tfrac{1}{3}y + \tfrac{1}{4}z = 58$$

Auflösung.

Man verwandle die Gleichung (I.) in

$$\text{IV.}\quad 2\tfrac{1}{2}x - \tfrac{1}{2}y = 93$$

und die Gleichung (II.) in

$$\text{V.}\quad 6x - y - 5z = -86$$

Multiplicire (IV.) mit 2, welches

$$5x - y = 186$$

giebt, und ziehe diese Gleichung von (V.) ab, so bleibt

$$\text{VI.}\quad x - 5z = -272$$

Nun multiplicire man (III.) mit 3, so erhält man

$$\tfrac{3}{2}x + y + \tfrac{3}{4}z = 174$$

hierzu addire man (V.), so ist

$$\text{VII.}\quad 7\tfrac{1}{2}x - 4\tfrac{1}{4}z = 88$$

Ferner multiplicire man (VI.) mit $7\frac{1}{2}$, so ist

$$7\tfrac{1}{2}x - 37\tfrac{1}{2}z = -2040$$

Diese Gleichung von (VII.) abgezogen, giebt

$$33\tfrac{1}{4}z = 2128$$

$$\text{folgl. } z = 64;\ x = 48;\ y = 54.$$

25. Gleichung.

$$\text{I.}\quad 3x - 100 = 5y + 360$$

$$\text{II.}\quad 2\tfrac{1}{3}x + 200 = 16\tfrac{1}{2}z - 610$$

$$\text{III.}\quad 2y + 3z = 548$$

Auflösung.

Man verwandle die Gleichung (I.) in

$$\text{IV.}\quad 3x - 5y = 460$$

und die Gleichung (II.) in

$$\text{V.}\quad 2\tfrac{1}{3}x - 16\tfrac{1}{2}z = -810$$

alsdann multiplicire man (IV.) mit 2 und (III.) mit 5, so erhält man

$$6x - 10y = 920$$

$$15z + 10y = 2740$$

Addirt man diese beide Gleichungen, so ist

$$\text{VI.}\quad 6x + 15z = 3660$$

Multiplicirt man ferner die Gleichung (V.) mit 6, und (VI.) mit $2\frac{1}{3}$, so erhält man

$$\text{VII.}\quad 14x - 99z = -4860$$

$$\text{VIII.}\quad 14x + 35z = 8540$$

Subtrahirt man (VII.) von (VIII.), so ist

$$134z = 13400$$

folgl. $z = 100$; $x = 360$; $y = 124$

26. Gleichung.

I. $4x + 7y + 159 = 0$

II. $3\frac{1}{3}x = \frac{1}{6}z - 55$

III. $2x + y + 9z = 498$

Auflösung.

Man verwandele die Gleichung (I.) in

IV. $4x + 7y = -159$

und die Gleichung (II.) in

V. $3\frac{1}{3}x - \frac{1}{6}z = -55$

Multiplicire (III.) mit 7, welches

VI. $14x + 7y + 63z = 3486$

giebt, und subtrahire (IV.) von (VI.), so bleibt

VII. $10x + 63z = 3645$

Ferner multiplicire man (V.) mit 10 und (VII.) mit $3\frac{1}{3}$, so ist

VIII. $\frac{100}{3}x - \frac{5}{3}z = -550$

IX. $\frac{100}{3}x + 210z = 12150$

Subtrahirt man endlich (VIII.) von (IX.), so bleibt

$$211\frac{2}{3}z = 12700$$

folgl. $z = 60$; $x = -13\frac{1}{2}$; $y = -15$

27. Gleichung.

I. $2x + 5y - 7z = -288$

II. $5x - y + 3z = 227$

III. $7x + 6y + z = 297$

Auflösung.

Man multiplicire die Gleichung (II.) mit 5, welches

$$\text{IV. } 25x - 5y + 15z = 1135$$

giebt, und addire (I.) und (IV.), so erhält man

$$\text{V. } 27x + 8z = 847$$

Ferner multiplicire man (II.) mit 6, wodurch man

$$\text{VI. } 30x - 6y + 18z = 1362$$

erhält, und addire (III.) und (VI.), so ist

$$\text{VII. } 37x + 19z = 1659$$

Nun multiplicire man (VII.) mit 8, und (V.) mit 19, so erhält man

$$\text{VIII. } 296x + 152z = 13272$$

$$\text{IX. } 513x + 152z = 16093$$

Endlich subtrahire man (VIII.) von (IX.), so bleibt

$$217x = 2821$$

$$\text{folgl. } x = 13;\ y = 24;\ z = 62$$

28. Gleichung.

$$\text{I. } x + y + z = 30$$

$$\text{II. } 8x + 4y + 2z = 50$$

$$\text{III. } 27x + 9y + 3z = 64$$

Auflösung.

Man multiplicire die Gleichung (I.) mit 2, so ist

$$2x + 2y + 2z = 60$$

Diese Gleichung ziehe man von (II.) ab, so bleibt

$$\text{IV. } 6x + 2y = -10$$

Ferner multiplicire man (I.) mit 3, so ist

$$3x + 3y + 3z = 90$$

Diese Gleichung subtrahire man von (III.), so bleibt

$$\text{V. } 24x + 6y = -26$$

Endlich multiplicire man (V.) mit 2 und (IV.) mit 6, so erhält man

$$\text{VI. } 48x + 12y = -52$$

$$\text{VII. } 36x + 12y = -60$$

und subtrahire (VII.) von (VI.), so bleibt

$$12x = 8$$

$$\text{folgl. } x = \tfrac{2}{3};\ y = -7;\ z = 36\tfrac{1}{3}$$

29. Gleichung.

$$\text{I. } 18x - 7y - 5z = 11$$

$$\text{II. } 4\tfrac{2}{5}y - \tfrac{2}{3}x + z = 108$$

$$\text{III. } 3\tfrac{1}{2}z + 2y + \tfrac{3}{4}x = 80$$

Auflösung.

Zuvörderst multiplicire man die Gleichung (II.) mit 5, so ist

$$-\tfrac{10}{3}x + 22y + 5z = 540$$

hierzu die Gleichung (I.) addirt, giebt

$$\text{IV. } 14\tfrac{2}{3}x + 15y = 551$$

Ferner multiplicire man (II.) mit $3\frac{1}{2}$, wodurch man

$$3\tfrac{1}{2}z + 15\tfrac{2}{5}y - 2\tfrac{1}{3}x = 378$$

erhält, und ziehe hiervon (III.) ab, so bleibt

$$\text{V. } 13\tfrac{2}{5}y - 3\tfrac{1}{12}x = 298$$

Nun multiplicire man (V.) mit 15 und (IV.) mit $13\frac{2}{5}$, so ist

$$\text{VI.}\quad 201y - 46\tfrac{1}{4}x = 4470$$
$$\text{VII.}\quad 201y + 196\tfrac{8}{15}x = 7383\tfrac{2}{5}$$

Subtrahirt man also (VI.) von (VII.), so bleibt

$$242\tfrac{47}{60}x = 2913\tfrac{2}{5}$$

folgl. $x = 12;\ y = 25;\ z = 6$

30. Gleichung.

$$\text{I.}\quad ax + by + cz = h$$
$$\text{II.}\quad a'x + b'y + c'z = h'$$
$$\text{III.}\quad a''x + b''y + c''z = h''$$

Auflösung.

Man multiplicire die Gleichung (I.) mit a' und (II.) mit a, so erhält man

$$\text{IV.}\quad aa'x + ba'y + ca'z = a'h$$
$$\text{V.}\quad aa'x + ab'y + ac'z = ah'$$

Subtrahirt man (IV.) von (V.), so bleibt

$$\text{VI.}\quad (ab' - a'b)y + (ac' - a'c)z = a'h - ah'$$

Ferner multiplicire man (II.) mit a'' und (III.) mit a', so ist

$$\text{VII.}\quad a'a''x + a''b'y + a''c'z = a''h'$$
$$\text{VIII.}\quad a'a''x + a'b''y + a'c''z = a'h''$$

Subtrahirt man (VII.) von (VIII.), so bleibt

$$\text{IX.}\quad (a'b'' - a''b')y + (a'c'' - a''c')z = a'h'' - a''h'$$

Endlich multiplicire man (VI.) mit $a'b'' - a''b'$, und (IX.) mit $ab' - a'b$, wodurch man

$$\text{X.}\quad \left\{\begin{matrix}(a'b''-a''b')(ab'-a'b)y + (a'b''-a''b')(ac'-a'c)z \\ = (a'b''-a''b')\,(a'h - ah')\end{matrix}\right\}$$

$$\text{XI.}\quad \left\{\begin{matrix}(a'b''-a''b')(ab'-a'b)y + (ab'-a'b)(a'c''-a''c')z \\ = (ab'-a'b)\,(a'h''-a''h')\end{matrix}\right\}$$

erhält, und subtrahire (XI.) von (X.), so bleibt

$$[(a'b'' - a''b')(ac' - a'c) - (ab' - a'b)(a'c'' - a''c')]z$$
$$= (a'b'' - a''b')(a'h - ah') - (ab' - a'b)(a'h'' - a''h')$$

folgl. $z = \frac{(a'b''-a''b')(a'h-ah')-(ab'-a'b)(a'h''-a''h')}{(a'b''-a''b')(ac'-a'c)-(ab'-a'b)(a'c''-a''c')}$

Verrichtet man die Multiplication wirklich, und läßt im Zähler und Nenner den gemeinschaftlichen Faktor a weg, so erhält man

$$z = \frac{ab'h''-ab''h'+a'b''h-a'bh''+a''bh'-a''b'h}{ab'c''-ab''c'+a'b''c-a'bc''+a''bc'-a''b'c}$$

Auf eine ähnliche Art findet man

$$x = \frac{hb'c''-hb''c'+h'b''c-h'bc''+h''bc'-h''b'c}{ab'c''-ab''c'+a'b''c-a'bc''+a''bc'-a''b'c}$$

$$y = \frac{ah'c''-ah''c'+a'h''c-a'hc''+a''hc'-a''h'c}{ab'c''-ab''c'+a'b''c-a'bc''+a''bc'-a''b'c}$$

31. Gleichung.

I. $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = a$

II. $\frac{1}{x} + \frac{1}{z} = b$

III. $\frac{1}{y} + \frac{1}{z} = c$

Auflösung.

Man subtrahire (II.) von (I.), so bleibt

$$\frac{1}{y} - \frac{1}{z} = a - b$$

hierzu addire man die Gleichung (III.), so ist

$$\frac{2}{y} = a - b + c$$

folgl. $y = \frac{2}{a-b+c}$; $x = \frac{2}{a+b-c}$;

$$z = \frac{2}{b+c-a}$$

32. Gleichung.

$$\text{I.}\quad \frac{2}{x} - \frac{5}{3y} + \frac{1}{z} = 3\tfrac{4}{27}$$

$$\text{II.}\quad \frac{1}{4x} + \frac{1}{y} + \frac{2}{z} = 6\tfrac{11}{72}$$

$$\text{III.}\quad \frac{5}{6x} - \frac{1}{y} + \frac{4}{z} = 12\tfrac{1}{36}$$

Auflösung.

Man addire die Gleichungen (II.) und (III.), so erhält man

$$\text{IV.}\quad \frac{13}{12x} + \frac{6}{z} = 18\tfrac{13}{72}$$

Man multiplicire ferner (II.) mit $\frac{5}{3}$, welches

$$\frac{5}{12x} + \frac{5}{3y} + \frac{10}{3z} = 10\tfrac{55}{216}$$

giebt, und addire hierzu die Gleichung (I.), so ist

$$\text{V.}\quad \frac{29}{12x} + \frac{13}{3z} = 13\tfrac{29}{72}$$

Endlich multiplicire man (V.) mit 13 und (IV.) mit 29, so erhält man

$$\text{VI.}\quad \frac{377}{12x} + \frac{169}{3z} = 174\tfrac{17}{72}$$

$$\text{VII.}\quad \frac{377}{12x} + \frac{174}{z} = 527\tfrac{17}{72}$$

Subtrahirt man nun (VI.) von (VII.), so bleibt

$$\frac{353}{3z} = 353 \text{ oder } \frac{1}{3z} = 1$$

folgl. $z = \frac{1}{3}$; $x = 6$; $y = 9$

33. Gleichung.

$$\text{I. } \frac{2x+3y}{x+y} = 2\frac{1}{5}$$

$$\text{II. } \frac{x+z}{5(x-z)} = \frac{1}{3}$$

$$\text{III. } \frac{10x-3z}{4x-2z} = 2\frac{9}{14}$$

Auflösung.

Aus (I.) ergiebt sich

$$2x+3y = 2\tfrac{1}{5}x + 2\tfrac{1}{5}y$$

folgl. $x = 4y$

Aus (II.) ergiebt sich

$$x+z = \tfrac{5}{3}x - \tfrac{5}{3}z$$

folgl. $x = 4z$

Aus (III.) ergiebt sich endlich

$$10x - 3z = 10\tfrac{4}{7}x - 5\tfrac{2}{7}z$$

folgl. $x = 4z$

Aus den gegebenen Gleichungen erhält man also weiter nichts, als daß y so groß wie z, und daß x vier mal so groß als y oder z ist. Das Resultat ist also unbestimmt, indem man immer eine der dreien unbekannten Größen willkührlich annehmen kann, woraus sich alsdann die beiden übrigen ergeben. Ist z. E. $y = 1$,

so ist $z = 1$, $x = 4$. Ist $y = 4$, so ist $z = 4$, $x = 16$ u. s. w.*)

34. Gleichung.

$$\begin{aligned} &\text{I.} \quad ax + by = l \\ &\text{II.} \quad cx + du = m \\ &\text{III.} \quad ex + fz = n \\ &\text{IV.} \quad gy + hz = p \end{aligned}$$

Auflösung.

Aus (I.) ergiebt sich

$$x = \frac{l - by}{a}$$

und aus (III.)

$$x = \frac{n - fz}{e}$$

Es ist daher

$$\frac{l - by}{a} = \frac{n - fz}{e}$$

---

*) Diese Aufgabe mag übrigens als Beispiel dienen, daß, um die Werthe von mehreren unbekannten Größen zu finden, nicht allein so viele Gleichungen als unbekannte Größen gegeben seyn müssen, sondern diese Gleichungen müssen auch von der Art seyn, daß sich aus jeder derselben eine eigene Beziehung der gegebenen bekannten und unbekannten Größen gegen einander herleiten lasse. In gegenwärtiger Aufgabe ist das Resultat der dritten Gleichung dem der zweiten völlig gleich; daher kann die Auflösung keine bestimmte Werthe geben, weil für die drei unbekannten Größen eigentlich nur zwei Gleichungen gegeben sind.

$$\text{und } y = \frac{el - a(n - fz)}{be}$$

Nun ergiebt sich aus (IV.)

$$y = \frac{p - hz}{g}$$

Es ist also

$$\frac{p - hz}{g} = \frac{el - a(n - fz)}{be}$$

Aus dieser Gleichung findet man

$$z = \frac{bep + (an - el)g}{beh + afg}$$

Substituirt man diesen Werth für z in (IV.), so findet man

$$y = \frac{afp + (el - an)h}{beh + afg}$$

Diesen Werth in (I.) gesetzt, giebt

$$x = \frac{bhn + (gl - bp)f}{beh + afg}$$

Substituirt man endlich diesen Ausdruck in (II.), so findet man auch

$$u = \frac{bh(em - cn) + gf(am - cl) + bcfp}{d(beh + afg)}$$

35. Gleichung.

$$\begin{array}{ll} \text{I.} & x - 9y + 3z - 10u = 21 \\ \text{II.} & 2x + 7y - z - u = 683 \\ \text{III.} & 3x + y + 5z + 2u = 195 \\ \text{IV.} & 4x - 6y - 2z - 9u = 516 \end{array}$$

Auflösung.

Multiplicirt man die Gleichung (I.) mit 2, so ist

$$2x - 18y + 6z - 20u = 42$$

Diese Gleichung von (II.) abgezogen, giebt

$$\text{V.} \quad 25y - 7z + 19u = 641$$

Multiplicirt man ferner (I.) mit 3, so ist

$$3x - 27y + 9z - 30u = 63$$

Diese Gleichung von (III.) abgezogen, giebt

$$\text{VI.} \quad 28y - 4z + 32u = 132$$

Man multiplicire nun (VI.) mit 7 und (V.) mit 4, so erhält man

$$\text{VII.} \quad 196y - 28z + 224u = 924$$

$$\text{VIII.} \quad 100y - 28z + 76u = 2564$$

Man subtrahire (VIII.) von (VII.), so bleibt

$$\text{IX.} \quad 96y + 148u = -1640$$

Ferner multiplicire man (II.) mit 2, so ist

$$4x + 14y - 2z - 2u = 1366$$

hiervon (IV.) abgezogen, giebt

$$\text{X.} \quad 20y + 7u = 850$$

Multiplicirt man nun (X.) mit 96 und (IX.) mit 20, welches

$$\text{XI.} \quad 1920y + 672u = 81600$$

und $\text{XII.} \quad 1920y + 2960u = -32800$

giebt, und ziehet (XI.) von (XII.) ab, so bleibt

$$2288u = -114400$$

folgl. $u = -50$; $x = 100$; $y = 60$;

$$z = -13$$

D

36. Gleichung.

$$\begin{array}{ll} \text{I.} & x + y + z + u = 1 \\ \text{II.} & 16x + 8y + 4z + 2u = 9 \\ \text{III.} & 81x + 27y + 9z + 3u = 36 \\ \text{IV.} & 256x + 64y + 16z + 4u = 100 \end{array}$$

Auflösung.

Der Werth der unbekannten Größen läßt sich hier, wegen der besondern Natur der gegebenen Gleichungen (die darin bestehet, daß in der ersten Gleichung die Coefficienten der unbekannten Größen 1 sind; in den drei andern Gleichungen aber die Coefficienten eine fallende geometrische Reihe bilden, deren Exponenten wieder unter sich eine arithmetische Reihe, deren Exponent 1 ist, darstellen, nämlich 2, 3, 4), auf eine sehr kurze Art folgendergestalt finden. Man nehme die Differenz der ersten und zweiten, der zweiten und dritten, der dritten und vierten Gleichung, so erhält man

$$\begin{array}{ll} (\text{II.}) - (\text{I.}) = \text{V.} & 15x + 7y + 3z + u = 8 \\ (\text{III.}) - (\text{II.}) = \text{VI.} & 65x + 19y + 5z + u = 27 \\ (\text{IV.}) - (\text{III.}) = \text{VII.} & 175x + 37y + 7z + u = 64 \end{array}$$

Nun nehme man ferner die Differenz der ersten und fünften, der fünften und sechsten, der sechsten und siebenten Gleichung, so erhält man

$$\begin{array}{ll} (\text{V.}) - (\text{I.}) = \text{VIII.} & 14x + 6y + 2z = 7 \\ (\text{VI.}) - (\text{V.}) = \text{IX.} & 50x + 12y + 2z = 19 \\ (\text{VII.}) - (\text{VI.}) = \text{X.} & 110x + 18y + 2z = 37 \end{array}$$

Nimmt man abermals die Differenz der achten und neunten, der neunten und zehnten Gleichung, so giebt dieses

$$(IX.) - (VIII.) = XI. \quad 36x + 6y = 12$$
$$(X.) - (IX.) = XII. \quad 60x + 6y = 18$$

Die Differenz dieser beiden Gleichungen giebt

$$24x = 6$$

folgl. $x = \frac{1}{4}$; und also $y = \frac{1}{2}$; $z = \frac{1}{4}$; $u = 0$

37. Gleichung.

$$\text{I.} \quad \frac{x}{3} + \frac{y}{5} + \frac{2z}{7} = 58$$

$$\text{II.} \quad \frac{5x}{4} + \frac{y}{6} + \frac{z}{3} = 76$$

$$\text{III.} \quad \frac{x}{2} + \frac{3z}{8} + \frac{u}{5} = 79$$

$$\text{IV.} \quad y + z + u = 248$$

Auflösung.

Man multiplicire (I.) mit $\frac{1}{2}$ und (III.) mit $\frac{1}{3}$, so ist

$$\text{V.} \quad \frac{x}{6} + \frac{y}{10} + \frac{z}{7} = 29$$

$$\text{VI.} \quad \frac{x}{6} + \frac{z}{8} + \frac{u}{15} = 26\frac{1}{3}$$

Subtrahirt man (VI.) von (V.), so ist

$$\text{VII.} \quad \frac{y}{10} + \frac{z}{56} - \frac{u}{15} = 2\frac{2}{3}$$

Ferner multiplicire man (II.) mit $\frac{1}{2}$ und (III.) mit $\frac{5}{4}$, so ist

$$\text{VIII.}\quad \frac{5x}{8}+\frac{y}{12}+\frac{z}{6}=38$$

$$\text{IX.}\quad \frac{5x}{8}+\frac{u}{4}+\frac{15z}{32}=98\tfrac{3}{4}$$

Subtrahirt man (VIII.) von (IX.), so bleibt

$$\text{X.}\quad \frac{29z}{96}+\frac{u}{4}-\frac{y}{12}=60\tfrac{3}{4}$$

Multiplicirt man nun (IV.) mit $\frac{1}{12}$, welches

$$\frac{y}{12}+\frac{z}{12}+\frac{u}{12}=20\tfrac{2}{3}$$

giebt, und addirt diese Gleichung zu (X.), so ist

$$\text{XI.}\quad \frac{37z}{96}+\frac{u}{3}=81\tfrac{5}{12}$$

Multiplicirt man nochmals (IV.) mit $\frac{1}{10}$, welches

$$\frac{y}{10}+\frac{z}{10}+\frac{u}{10}=24\tfrac{4}{5}$$

giebt, und subtrahirt von dieser Gleichung (VII.), so bleibt

$$\text{XII.}\quad \frac{23z}{280}+\frac{u}{6}=22\tfrac{2}{15}$$

Multiplicirt man endlich (XII.) mit 2, wodurch man

$$\frac{23z}{140}+\frac{u}{3}=44\tfrac{4}{15}.$$

erhält, und subtrahirt die Gleichung von (XI.), so bleibt

$$\frac{743z}{3360}=\frac{743}{20}$$

folgl. $z=168$; $x=12$; $y=30$; $u=50$

38. Gleichung.

$$\frac{xy}{ay+bx}=l$$

$$\frac{yz}{cz+dy}=m$$

$$\frac{xz}{ez+fx}=n$$

Auflösung.

Um diese Gleichungen auf die kürzeste Art aufzulösen, erwäge man, daß ein jeder Bruch nichts weiter als das Verhältniß zwischen Zähler und Nenner angiebt. Die Gleichheit zweier Brüche ist also als eine Proportion anzusehen, wobei entweder die Zähler die Vorder-, und die Nenner die Hinterglieder, oder die Nenner die Vorder-, und die Zähler die Hinterglieder bedeuten. Ist daher z. E.

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \text{ oder } a:b=c:d$$

so ist auch

$$\frac{b}{a}=\frac{d}{c} \text{ oder } b:a=d:c$$

Setzt man also bei den hier gegebenen Gleichungen für die Größen l, m, n, die Brüche $\frac{l}{1}, \frac{m}{1}, \frac{n}{1}$, kehrt die Brüche auf beiden Seiten der Gleichungen um, und hebt die gleichen Größen in Zähler und Nenner gegen einander auf, so erhält man

$$\text{I. } \frac{a}{x}+\frac{b}{y}=\frac{1}{l}$$

$$\text{II.} \quad \frac{c}{y} + \frac{d}{z} = \frac{1}{m}$$

$$\text{III.} \quad \frac{e}{x} + \frac{f}{z} = \frac{1}{n}$$

Man multiplicire (I.) mit e und (III.) mit a, so ist

$$\text{IV.} \quad \frac{ae}{x} + \frac{be}{y} = \frac{e}{l}$$

$$\text{V.} \quad \frac{ae}{x} + \frac{af}{z} = \frac{a}{n}$$

(IV.) von (V.) subtrahirt, giebt

$$\frac{af}{z} - \frac{be}{y} = \frac{a}{n} - \frac{e}{l}$$

Multiplicirt man diese Gleichung mit d, und (II.) mit af, welches

$$\text{VI.} \quad \frac{afd}{z} - \frac{bde}{y} = \frac{ad}{n} - \frac{de}{l}$$

$$\text{VII.} \quad \frac{afd}{z} + \frac{acf}{y} = \frac{af}{m}$$

giebt, und ziehet (VI.) von (VII.) ab, so bleibt

$$\frac{acf + bde}{y} = \frac{af}{m} - \frac{ad}{n} + \frac{de}{l}$$

$$\text{oder } acf + bde = y \; \frac{afnl - adml + demn}{mnl}$$

$$\text{folgl. } y = \frac{lmn\,(acf + dbe)}{afln - adlm + demn}$$

Diesen Ausdruck in (I.) substituirt, giebt

$$x = \frac{lmn\,(acf + bde)}{cfmn - bfln + bdlm}$$

und in (II.) substituirt, giebt

$$z = \frac{lmn\,(acf + bde)}{beln - cemn + aclm}$$

39. Gleichung.

$$\begin{aligned} x+y+z+u+t &= a \\ x+y+z+u+w &= b \\ x+y+z+t+w &= c \\ x+y+u+t+w &= d \\ x+z+u+t+w &= e \\ y+z+u+t+w &= f \end{aligned}$$

Auflösung.

Die Natur dieser Gleichungen bietet auch hier einen kürzern Weg zur Auflösung dar. Man setze nämlich die Summe der sechs unbekannten Größen $x+y+z+t+u+w=S$, und die Summe der sechs bekannten Größen $a+b+c+d+e+f=s$, so erhält man statt der gegebenen Gleichungen, da in der ersten alle unbekannten Größen außer w, in der zweiten alle unbekannten Größen außer t, u. s. w. enthalten sind:

$$\begin{aligned} S-w &= a \\ S-t &= b \\ S-u &= c \\ S-z &= d \\ S-y &= e \\ S-x &= f \end{aligned}$$

Addirt man diese Gleichungen, so erhält man

$$6S-(w+t+u+z+y+x) = s$$

oder $5S = s$

und $S = \frac{s}{5}$

das ist $w + t + u + z + y + x = \frac{s}{5}$

Ziehet man von dieser Gleichung successive die erste, zweite, dritte, vierte, fünfte und sechste Gleichung der gegebenen Gleichungen ab, so erhält man unmittelbar

$$w = \frac{s}{5} - a;\ t = \frac{s}{5} - b;\ u = \frac{s}{5} - c;$$

$$z = \frac{s}{5} - d;\ y = \frac{s}{5} - e;\ x = \frac{s}{5} - f$$

III.

Auflösungen der Gleichungen vom zweiten Grade mit einer unbekannten Größe.

---

1. Gleichung.

$$ax^2 = b$$

Auflösung.

$$x^2 = \frac{b}{a} \text{*)}$$

$$\text{folgl. } x = \pm \sqrt{\left(\frac{b}{a}\right)}$$

---

*) In der allgemeinen Formel zur Auflösung der quadratischen Gleichungen, welche Herr Meier Hirsch in seiner Sammlung von Beispielen ꝛc. S. 136 angegeben hat, ist auch die hier gefundene reine quadratische Gleichung $x^2 = \frac{b}{a}$ begriffen. Denn man braucht nur $P = 0$, $Q = \frac{b}{a}$ zu setzen, so ist

$$x^2 + 0x = \frac{b}{a}$$

und hieraus

$$x = -\frac{0}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{0^2}{4} + \frac{b}{a}\right)}$$

$$= \pm \sqrt{\frac{b}{a}}$$

2. Gleichung.

$$x^2 + 6x = 27$$

Auflösung.

$$x^2 + 6x + 9 = 27 + 9 = 36$$

Ziehet man auf beiden Seiten die Quadratwurzel aus, so ist

$$x + 3 = \pm 6$$

folgl. $x = 6 - 3 = 3$

oder $x = -6 - 3 = -9$

3. Gleichung.

$$x^2 - 7x + 3\tfrac{1}{4} = 0$$

Auflösung.

$$x^2 - 7x = -3\tfrac{1}{4}$$

oder $x^2 - 7x + \frac{49}{4} = -3\tfrac{1}{4} + \frac{49}{4} = 9$

Man ziehe auf beiden Seiten die Quadratwurzel aus, so ist

$$x - \frac{7}{2} = \pm 3$$

folgl. $x = 3 + \frac{7}{2} = 6\tfrac{1}{2}$

oder $x = -3 + \frac{7}{2} = \frac{1}{2}$

4. Gleichung.

$$x^2 - 5\tfrac{3}{4}x = 18$$

Auflösung.

$$x^2 - 5\tfrac{3}{4}x + \left(\frac{23}{8}\right)^2 = 18 + \left(\frac{23}{8}\right)^2 = \frac{1681}{64}$$

Auf beiden Seiten die Quadratwurzel ausgezogen, giebt

$$x - \frac{23}{8} = \pm \frac{41}{8}$$

$$\text{folgl. } x = \frac{41}{8} + \frac{23}{8} = 8$$

$$\text{oder } x = -\frac{41}{8} + \frac{23}{8} = -2\tfrac{1}{4}$$

5. Gleichung.

$$3x^2 - 2x = 65$$

Auflösung.

$$x^2 - \frac{2x}{3} = \frac{65}{3}$$

$$\text{oder } x^2 - \frac{2x}{3} + \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{65}{3} + \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{196}{9}$$

hieraus die Quadratwurzel gezogen, giebt

$$x - \frac{1}{3} = \pm \frac{14}{3}$$

$$\text{folgl. } x = \frac{14}{3} + \frac{1}{3} = 5$$

$$\text{oder } x = -\frac{14}{3} + \frac{1}{3} = -4\tfrac{1}{3}$$

6. Gleichung.

$$622x = 15x^2 + 6384$$

Auflösung.

$$x^2 - \frac{622x}{15} = -\frac{6384}{15}$$

$$\text{oder } x^2 - \frac{622x}{15} + \left(\frac{311}{15}\right)^2 = -\frac{6384}{15} + \left(\frac{311}{15}\right)^2 = \frac{961}{15^2}$$

$$\text{also } x - \frac{311}{15} = \pm \frac{31}{15}$$

$$\text{folgl. } x = \frac{31}{15} + \frac{311}{15} = 22\tfrac{4}{5}$$

$$\text{oder } x = -\frac{31}{15} + \frac{311}{15} = 18\tfrac{2}{3}$$

7. Gleichung.

$$20748 - 1616x + 21x^2 = 0$$

Auflösung.

$$21x^2 - 1616x = -20748$$

$$\text{oder } x^2 - \frac{1616x}{21} = -988$$

$$\text{also } x^2 - \frac{1616x}{21} + \left(\frac{808}{21}\right)^2 = -988 + \left(\frac{808}{21}\right)^2$$

$$= \frac{217156}{21^2}$$

$$\text{und } x - \frac{808}{21} = \pm \frac{466}{21}$$

$$\text{folgl. } x = \frac{466}{21} + \frac{808}{21} = 60\tfrac{2}{3}$$

$$\text{oder } x = -\frac{466}{21} + \frac{808}{21} = 16\tfrac{2}{7}$$

8. Gleichung.

$$9\tfrac{3}{5}x - 21\tfrac{15}{16} = x^2$$

Auflösung.

$$x^2 - 9\tfrac{3}{5}x = -21\tfrac{15}{16}$$

$$\text{oder } x^2 - \frac{48x}{5} + \left(\frac{24}{5}\right)^2 = -21\tfrac{15}{16} + \left(\frac{24}{5}\right)^2 = \frac{441}{400}$$

$$\text{also } x - \frac{24}{5} = \pm\frac{21}{20}$$

$$\text{folgl. } x = \frac{21}{20} + \frac{24}{5} = 5\tfrac{17}{20}$$

$$\text{oder } x = -\frac{21}{20} + \frac{24}{5} = 3\tfrac{3}{4}$$

9. Gleichung.

$$11\tfrac{3}{4}x - 3\tfrac{1}{2}x^2 = -41\tfrac{1}{4}$$

Auflösung.

$$3\tfrac{1}{2}x^2 - 11\tfrac{3}{4}x = 41\tfrac{1}{4}$$

Schafft man sämmtliche Nenner weg, so ist

$$14x^2 - 47x = 165$$

$$\text{oder } x^2 - \frac{47x}{14} = \frac{165}{14}$$

$$\text{also } x^2 - \frac{47x}{14} + \left(\frac{47}{28}\right)^2 = \frac{165}{14} + \left(\frac{47}{28}\right)^2 = \frac{11449}{28^2}$$

$$\text{und } x - \frac{47}{28} = \pm\frac{107}{28}$$

$$\text{folgl. } x = \frac{107}{28} + \frac{47}{28} = 5\tfrac{1}{2}$$

$$\text{oder } x = -\frac{107}{28} + \frac{47}{28} = -2\tfrac{1}{7}$$

10. Gleichung.

$$9\tfrac{1}{3}x^2 - 90\tfrac{1}{3}x + 195 = 0$$

Auflösung.

$$9\tfrac{1}{3}x^2 - 90\tfrac{1}{3}x = -195$$

Werden sämmtliche Nenner weggeschafft, so ist

$$28x^2 - 271x = -585$$

oder $x^2 - \frac{271x}{28} = -\frac{585}{28}$

also $x^2 - \frac{271x}{28} + \left(\frac{271}{56}\right)^2 = -\frac{585}{28} + \left(\frac{271}{56}\right)^2$

$= \frac{7921}{56^2}$

und $x - \frac{271}{56} = \pm\frac{89}{56}$

folgl. $x = \frac{89}{56} + \frac{271}{56} = 6\frac{3}{7}$

oder $x = -\frac{89}{56} + \frac{271}{56} = 3\frac{1}{4}$

11. Gleichung.

$$\frac{18x^2}{5} + \frac{18078x}{65} + 4728 = 0$$

Auflösung.

$$\frac{18x^2}{5} + \frac{18078x}{65} = -4728$$

Schafft man die Nenner aus der Gleichung weg, welches

$$234x^2 + 18078x = -307320$$

giebt, und dividirt sie durch 6, so ist

$$39x^2 + 3013x = -51220$$

oder $x^2 + \frac{3013x}{39} = -\frac{51220}{39}$

also $x^2 + \frac{3013x}{39} + \left(\frac{3013}{78}\right)^2 = -\frac{51220}{39} + \left(\frac{3013}{78}\right)^2$

$= \frac{1087849}{78^2}$

und $x + \frac{3013}{78} = \pm \frac{1043}{78}$.

folgl. $x = \frac{1043}{78} - \frac{3013}{78} = -25\frac{10}{39}$

oder $x = -\frac{1043}{78} - \frac{3013}{78} = -52$

12. Gleichung.

$$x^2 - 8x = 14$$

Auflösung.

$$x^2 - 8x + 16 = 14 + 16 = 30$$

also $x - 4 = \pm\sqrt{30}$

folgl. $x = 4 + \sqrt{30} = 9,4772\ldots$

oder $x = 4 - \sqrt{30} = -1,4772\ldots$

13. Gleichung.

$$3x^2 + x = 7$$

Auflösung.

$$x^2 + \frac{x}{3} = \frac{7}{3}$$

oder $x^2 + \frac{x}{3} + \left(\frac{1}{6}\right)^2 = \frac{7}{3} + \left(\frac{1}{6}\right)^2 = \frac{85}{36}$

und $x + \frac{1}{6} = \pm\sqrt{\frac{85}{36}}$

folgl. $x = -\frac{1}{6} + \sqrt{\frac{85}{36}} = \frac{-1+\sqrt{85}}{6} = 1,3699\ldots$

und $x = -\frac{1}{6} - \sqrt{\frac{85}{36}} = \frac{-1-\sqrt{85}}{6} = -1,7032\ldots$

14. Gleichung.

$$118x - 2\tfrac{1}{2}x^2 = 20$$

Auflösung.

$$2\tfrac{1}{2}x^2 - 118x = -20$$

$$\text{oder } x^2 - \frac{236x}{5} = -8$$

$$\text{also } x^2 - \frac{236x}{5} + \left(\frac{118}{5}\right)^2 = -8 + \left(\frac{118}{5}\right)^2 = \frac{13724}{5^2}$$

$$\text{oder } x - \frac{118}{5} = \pm\sqrt{\frac{13724}{5^2}}$$

$$\text{folgl. } x = \frac{118}{5} + \sqrt{\frac{13724}{5^2}} = \frac{118 + \sqrt{13724}}{5}$$

$$= 47{,}0298\ldots.$$

$$\text{oder } x = \frac{118}{5} - \sqrt{\frac{13724}{5^2}} = \frac{118 - \sqrt{13724}}{5}$$

$$= 0{,}1701\ldots.$$

15. Gleichung.

$$6x - 30 = 3x^2$$

Auflösung.

Man dividire die Gleichung durch 3, und ordne sie, so ist

$$x^2 - 2x = -10$$

$$\text{oder } x^2 - 2x + 1 = -10 + 1 = -9$$

$$\text{und } x - 1 = \pm\sqrt{-9}$$

$$\text{folgl. } x = 1 + \sqrt{-9}$$

$$\text{oder } x = 1 - \sqrt{-9} \ {}^{*)}$$

---

*) Die Aufgabe, welche auf eine solche Gleichung führt, ist also unmöglich.

16. Gleichung.

$$8x^2 - 7x + 34 = 0$$

Auflösung.

$$8x^2 - 7x = -34$$

oder $x^2 - \frac{7x}{8} = -\frac{34}{8}$

und $x^2 - \frac{7x}{8} + \left(\frac{7}{16}\right)^2 = -\frac{34}{8} + \left(\frac{7}{16}\right)^2 = \frac{-1039}{16^2}$

oder $x - \frac{7}{16} = \pm\sqrt{\frac{-1039}{16^2}}$

folgl. $x = \frac{7}{16} + \sqrt{\frac{-1039}{16^2}} = \frac{7 + \sqrt{-1039}}{16}$

oder $x = \frac{7}{16} - \sqrt{\frac{-1039}{16^2}} = \frac{7 - \sqrt{-1039}}{16}$

17. Gleichung.

$$4x^2 - 9x = 5x^2 - 255\tfrac{3}{4} - 8x$$

Auflösung.

Man reducire und ordne die Gleichung, so ist

$$x^2 + x = 255\tfrac{3}{4}$$

oder $x^2 + x + \frac{1}{4} = 255\frac{3}{4} + \frac{1}{4} = 256$

und $x + \frac{1}{2} = \pm 16$

folgl. $x = 16 - \frac{1}{2} = 15\frac{1}{2}$

oder $x = -16 - \frac{1}{2} = -16\frac{1}{2}$

18. Gleichung.

$$80x + \frac{3x^2}{4} + \frac{21x - 27782}{12} = 1859\tfrac{1}{3} - 3x^2$$

Auflösung.

Zuvörderst schaffe man die Nenner weg, indem man die ganze Gleichung mit dem General-Nenner 12 multiplicirt, und Zähler und Nenner gegen einander aufhebt, so erhält man

$$960x + 9x^2 + 21x - 27782 = 22312 - 36x^2$$

Man reducire und ordne die Gleichung gehörig, so ist

$$45x^2 + 981x = 50094$$

Diese Gleichung durch 9 dividirt, giebt

$$5x^2 + 109x = 5566$$

$$\text{oder } x^2 + \frac{109x}{5} = \frac{5566}{5}$$

$$\text{und } x^2 + \frac{109x}{5} + \left(\frac{109}{10}\right)^2 = \frac{5566}{5} + \left(\frac{109}{10}\right)^2$$

$$= \frac{123201}{10^2}$$

$$\text{oder } x + \frac{109}{10} = \pm \frac{351}{10}$$

$$\text{folgl. } x = \frac{351}{10} - \frac{109}{10} = 24\tfrac{1}{5}$$

$$\text{oder } x = -\frac{351}{10} - \frac{109}{10} = -46$$

19. Gleichung.

$$\frac{x}{x+60} = \frac{7}{3x-5}$$

Auflösung.

Man schaffe die Nenner weg, indem man x mit $3x-5$, und 7 mit $x+60$ multiplicirt, und den General-Nenner $(x+60)(3x-5)$ gänzlich wegläßt, so ist

$$3x^2-5x = 7x+420$$
oder $$3x^2-12x = 420$$
das ist $$x^2-4x = 140$$
also $$x^2-4x+4 = 140+4 = 144$$
und $$x-2 = \pm 12$$
folgl. $$x = 2+12 = 14$$
oder $$x = 2-12 = -10$$

20. Gleichung.

$$\frac{40}{x-5}+\frac{27}{x} = 13$$

Auflösung.

Schafft man die Nenner weg, indem man nämlich die ganze Gleichung mit dem General-Nenner $(x-5)x$ multiplicirt, und Zähler und Nenner gegen einander aufhebt, so ist

$$40x+27x-135 = 13x^2-65x$$

Ordnet man ferner die Gleichung, so erhält man

$$13x^2-132x = -135$$
oder $$x^2-\frac{132x}{13} = -\frac{135}{13}$$

$$\text{und } x^2 - \frac{132x}{13} + \left(\frac{66}{13}\right)^2 = -\frac{135}{13} + \left(\frac{66}{13}\right)^2 = \frac{2601}{13^2}$$

$$\text{oder } x - \frac{66}{13} = \pm\frac{51}{13}$$

$$\text{folgl. } x = \frac{51}{13} + \frac{66}{13} = 9$$

$$\text{oder } x = -\frac{51}{13} + \frac{66}{13} = 1\tfrac{2}{13}$$

21. Gleichung.

$$\frac{8x}{x+2} - 6 = \frac{20}{3x}$$

Auflösung.

Man schaffe nach der vorhergehenden Art die Nenner weg, indem man mit $(x+2)\,3x$ multiplicirt, so ist

$$24x^2 - 18x^2 - 36x = 20x + 40$$

Man ordne die Gleichung, so ist

$$6x^2 - 56x = 40$$

$$\text{oder } 3x^2 - 28x = 20$$

$$\text{und } x^2 - \frac{28x}{3} = \frac{20}{3}$$

$$\text{oder } x^2 - \frac{28x}{3} + \left(\frac{14}{3}\right)^2 = \frac{20}{3} + \left(\frac{14}{3}\right)^2 = \frac{256}{3^2}$$

$$\text{also } x - \frac{14}{3} = \pm\frac{16}{3}$$

$$\text{folgl. } x = \frac{14}{3} + \frac{16}{3} = 10$$

$$\text{oder } x = \frac{14}{3} - \frac{16}{3} = -\tfrac{2}{3}$$

22. Gleichung.

$$\frac{48}{x+3} = \frac{165}{x+10} - 5$$

Auflösung.

Schafft man die Nenner weg, indem man die Gleichung mit $(x+3)(x+10)$ multiplicirt, so ist

$$48x + 480 = 165x + 495 - 5x^2 - 65x - 150$$

Diese Gleichung geordnet, giebt $5x^2 - 52x = -135$

$$\text{oder } x^2 - \frac{52x}{5} = -27$$

$$\text{und } x^2 - \frac{52x}{5} + \left(\frac{26}{5}\right)^2 = -27 + \left(\frac{26}{5}\right)^2 = \frac{1}{5^2}$$

$$\text{also } x - \frac{26}{5} = \pm\frac{1}{5}$$

$$\text{folgl. } x = \frac{26}{5} + \frac{1}{5} = 5\tfrac{2}{5}$$

$$\text{oder } x = \frac{26}{5} - \frac{1}{5} = 5$$

23. Gleichung.

$$\frac{31}{6x} = \frac{16}{117-2x} + 1$$

Auflösung.

Wenn man zuvörderst die Brüche durch die Multiplication mit $6x\,(117-2x)$ wegschafft, so ist

$$3627 - 62x = 96x + 702x - 12x^2$$

Ordnet man diese Gleichung, so erhält man

$$12x^2 - 860x = -3627$$

$$\text{oder } x^2 - \frac{215x}{3} = -\frac{1209}{4}$$

$$\text{und } x^2 - \frac{215x}{3} + \left(\frac{215}{6}\right)^2 = -\frac{1209}{4} + \left(\frac{215}{6}\right)^2$$

$$= \frac{35344}{6^2}$$

$$\text{oder } x - \frac{215}{6} = \pm\frac{188}{6}$$

$$\text{folgl. } x = \frac{188}{6} + \frac{215}{6} = 67\tfrac{1}{6}$$

$$\text{oder } x = -\frac{188}{6} + \frac{215}{6} = 4\tfrac{1}{2}$$

24. Gleichung.

$$\frac{2x+3}{10-x} = \frac{2x}{25-3x} - 6\tfrac{1}{2}$$

Auflösung.

Man schaffe die Nenner aus der Gleichung weg, wodurch man

$$-12x^2 + 82x + 150 = 40x - 4x^2 - 3250 + 715x - 39x^2$$

erhält. Diese Gleichung geordnet, giebt

$$31x^2 - 673x = -3400$$

$$\text{oder } x^2 - \frac{673x}{31} = -\frac{3400}{31}$$

$$\text{also } x^2 - \frac{673x}{31} + \left(\frac{673}{62}\right)^2 = -\frac{3400}{31} + \left(\frac{673}{62}\right)^2$$

$$= \frac{31329}{62^2}$$

$$\text{und} \quad x - \frac{673}{62} = \pm \frac{177}{62}$$

$$\text{folgl.} \quad x = \frac{177}{62} + \frac{673}{62} = 13\tfrac{22}{31}$$

$$\text{oder} \quad x = -\frac{177}{62} + \frac{673}{62} = 8$$

25. Gleichung.

$$\frac{25x + 180}{10x - 81} = \frac{40x}{5x - 8} - \tfrac{3}{5}$$

Auflösung.

Wenn man die Nenner aus dieser Gleichung wegschafft, so ist

$$625x^2 + 3500x - 7200$$
$$= 2000x^2 - 16200x - 150x^2 + 1455x - 1944$$

Die Gleichung geordnet, giebt

$$1225x^2 - 18245x = -5256$$

$$\text{oder} \quad x^2 - \frac{3649x}{245} = -\frac{5256}{1225}$$

$$\text{also} \quad x^2 - \frac{3649x}{245} + \left(\frac{3649}{490}\right)^2 = -\frac{5256}{1225} + \left(\frac{3649}{490}\right)^2$$
$$= \frac{12285025}{490^2}$$

$$\text{oder} \quad x - \frac{3649}{490} = \pm \frac{3505}{490}$$

$$\text{folgl.} \quad x = \frac{3505}{490} + \frac{3649}{490} = 14\tfrac{3}{5}$$

$$\text{oder} \quad x = -\frac{3505}{490} + \frac{3649}{490} = \frac{72}{245}$$

$$\text{oder } x^2 - \frac{215x}{3} = -\frac{1209}{4}$$

$$\text{und } x^2 - \frac{215x}{3} + \left(\frac{215}{6}\right)^2 = -\frac{1209}{4} + \left(\frac{215}{6}\right)^2$$

$$= \frac{35344}{6^2}$$

$$\text{oder } x - \frac{215}{6} = \pm\frac{188}{6}$$

$$\text{folgl. } x = \frac{188}{6} + \frac{215}{6} = 67\tfrac{1}{6}$$

$$\text{oder } x = -\frac{188}{6} + \frac{215}{6} = 4\tfrac{1}{2}$$

24. Gleichung.

$$\frac{2x+3}{10-x} = \frac{2x}{25-3x} - 6\tfrac{1}{2}$$

Auflösung.

Man schaffe die Nenner aus der Gleichung weg, wodurch man

$-12x^2 + 82x + 150 = 40x - 4x^2 - 3250 + 715x - 39x^2$

erhält. Diese Gleichung geordnet, giebt

$$31x^2 - 673x = -3400$$

$$\text{oder } x^2 - \frac{673x}{31} = -\frac{3400}{31}$$

$$\text{also } x^2 - \frac{673x}{31} + \left(\frac{673}{62}\right)^2 = -\frac{3400}{31} + \left(\frac{673}{62}\right)^2$$

$$= \frac{31329}{62^2}$$

$$\text{und}\quad x - \frac{673}{62} = \pm\frac{177}{62}$$

$$\text{folgl.}\ x = \frac{177}{62} + \frac{673}{62} = 13\tfrac{22}{31}$$

$$\text{oder}\quad x = -\frac{177}{62} + \frac{673}{62} = 8$$

25. Gleichung.

$$\frac{25x + 180}{10x - 81} = \frac{40x}{5x - 8} - \tfrac{3}{5}$$

Auflösung.

Wenn man die Nenner aus dieser Gleichung wegschafft, so ist

$$625x^2 + 3500x - 7200$$
$$= 2000x^2 - 16200x - 150x^2 + 1455x - 1944$$

Die Gleichung geordnet, giebt

$$1225x^2 - 18245x = -5256$$

$$\text{oder}\ x^2 - \frac{3649x}{245} = -\frac{5256}{1225}$$

$$\text{also}\ x^2 - \frac{3649x}{245} + \left(\frac{3649}{490}\right)^2 = -\frac{5256}{1225} + \left(\frac{3649}{490}\right)^2$$
$$= \frac{12285025}{490^2}$$

$$\text{oder}\ x - \frac{3649}{490} = \pm\frac{3505}{490}$$

$$\text{folgl.}\ x = \frac{3505}{490} + \frac{3649}{490} = 14\tfrac{3}{5}$$

$$\text{oder}\ x = -\frac{3505}{490} + \frac{3649}{490} = \frac{72}{245}$$

26. Gleichung.

$$\frac{18+x}{6(3-x)} = \frac{20x+9}{19-7x} - \frac{65}{4(3-x)}$$

Auflösung.

Hier ist der General-Nenner $12(3-x)(19-7x)$. Multiplicirt man hiermit die ganze Gleichung, nachdem man, wie gewöhnlich, mit dem Special-Nenner eines jeden Bruchs hinein dividirt, und den Quotienten mit dem Zähler multiplicirt, so erhält man

$$-14x^2 - 214x + 684 =$$
$$-240x^2 + 612x + 324 - 3705 + 1365x$$

Ordnet man die Gleichung, so ist

$$226x^2 - 2191x = -4065$$

$$\text{oder } x^2 - \frac{2191x}{226} = -\frac{4065}{226}$$

$$\text{also } x^2 - \frac{2191x}{226} + \left(\frac{2191}{452}\right)^2 = -\frac{4065}{226} + \left(\frac{2191}{452}\right)^2$$
$$= \frac{1125721}{452^2}$$

$$\text{oder } x - \frac{2191}{452} = \pm\frac{1061}{452}$$

$$\text{folgl. } x = \frac{1061}{452} + \frac{2191}{452} = 7\tfrac{22}{113}$$

$$\text{oder } x = -\frac{1061}{452} + \frac{2191}{452} = 2\tfrac{1}{2}$$

27. Gleichung.

$$adx - acx^2 = bcx - bd$$

Auflösung.

Nachdem die Gleichung geordnet, ist

$$acx^2 + (bc - ad)x = bd$$

oder $$x^2 + \frac{(bc-ad)x}{ac} = \frac{bd}{ac}$$

und $$x^2 + \frac{(bc-ad)x}{ac} + \left(\frac{bc-ad}{2ac}\right)^2 = \frac{bd}{ac} + \left(\frac{bc-ad}{2ac}\right)^2$$

oder $$x + \frac{bc-ad}{2ac} = \pm\sqrt{\left[\frac{bd}{ac} + \left(\frac{bc-ad}{2ac}\right)^2\right]}$$

folgl. $$x = -\frac{bc-ad}{2ac} \pm \sqrt{\left[\frac{bd}{ac} + \left(\frac{bc-ad}{2ac}\right)^2\right]}$$

$$= -\frac{bc-ad}{2ac} \pm \sqrt{\frac{b^2c^2 + 2abcd + a^2d^2}{(2ac)^2}}$$

$$= -\frac{bc-ad}{2ac} + \frac{bc+ad}{2ac}$$

$$= \frac{-bc+ad+bc+ad}{2ac} = \frac{2ad}{2ac} = \frac{d}{c}$$

oder $$x = -\frac{bc-ad}{2ac} - \frac{bc+ad}{2ac}$$

$$= \frac{-bc+ad-bc-ad}{2ac} = \frac{-2bc}{2ac} = -\frac{b}{a}$$

28. Gleichung.

$$\frac{a^2x^2}{f^2} - \frac{2ax}{g} + \frac{f^2}{g^2} = 0$$

Auflösung.

Man ordne die Gleichung, so ist

$$\frac{a^2x^2}{f^2} - \frac{2ax}{g} = -\frac{f^2}{g^2}$$

$$\text{oder } x^2 - \frac{2f^2x}{ag} = -\frac{f^4}{a^2g^2}$$

$$\text{also } x^2 - \frac{2f^2x}{ag} + \frac{f^4}{a^2g^2} = -\frac{f^4}{a^2g^2} + \frac{f^4}{a^2g^2} = 0$$

Ziehet man aus beiden Theilen der Gleichung die Quadratwurzel, so ist

$$x - \frac{f^2}{ag} = \pm 0$$

folglich sind beide Werthe von

$$x = \frac{f^2}{ag}$$

29. Gleichung.

$$abx^2 + \frac{3a^2x}{c} = \frac{6a^2 + ab - 2b^2}{c^2} - \frac{b^2x}{c}$$

Auflösung.

Ordnet man die Gleichung, so ist

$$abx^2 + \frac{(3a^2 + b^2)x}{c} = \frac{6a^2 + ab - 2b^2}{c^2}$$

$$\text{oder } x^2 + \frac{(3a^2 + b^2)x}{abc} = \frac{6a^2 + ab - 2b^2}{abc^2}$$

$$\text{also } x^2 + \frac{(3a^2 + b^2)x}{abc} + \left(\frac{3a^2 + b^2}{2abc}\right)^2$$

$$= \frac{6a^2 + ab - 2b^2}{abc^2} + \left(\frac{3a^2 + b^2}{2abc}\right)^2$$

$$\text{und } x + \frac{3a^2+b^2}{2abc} = \pm\sqrt{\left[\left(\frac{3a^2+b^2}{2abc}\right)^2 + \frac{6a^2+ab-2b^2}{abc^2}\right]}$$

$$= \pm\sqrt{\frac{9a^4 + 6a^2b^2 + b^4 + 24a^3b + 4a^2b^2 - 8ab^3}{(2abc)^2}}$$

$$= \pm\sqrt{\frac{9a^4 + 24a^3b + 10a^2b^2 - 8ab^3 + b^4}{(2abc)^2}}$$

Ziehet man die Quadratwurzel wirklich aus *), so erhält man

$$x + \frac{3a^2 + b^2}{2abc} = \pm \frac{3a^2 + 4ab - b^2}{2abc}$$

$$\text{folgl. } x = \frac{3a^2 + 4ab - b^2}{2abc} - \frac{3a^2 + b^2}{2abc}$$

$$= \frac{4ab - 2b^2}{2abc} = \frac{2b\,(2a - b)}{2abc} = \frac{2a - b}{ac}$$

$$\text{oder } x = -\frac{3a^2 + 4ab - b^2}{2abc} - \frac{3a^2 + b^2}{2abc}$$

$$= -\frac{6a^2 + 4ab}{2abc} = -\frac{2a\,(3a + 2b)}{2abc} = -\frac{3a + 2b}{bc}$$

30. Gleichung.

$$\frac{2c^2}{d^2} + \frac{ac}{d} - (a - b)\ (2c + ad)\ \frac{x}{d}$$

$$= (a + b)\ \frac{cx}{d} - (a^2 - b^2)\ x^2$$

Auflösung.

Nachdem man die Gleichung geordnet, so ist

---

*) Man ziehet aus Buchstabenausdrücken eben so die Quadratwurzel wie aus Zahlen. Als z. B.

$$\text{Wurzel } \overline{3a^2 + 4ab - b^2}$$

$$9a^4 + 24a^3b + 10a^2b^2 - 8ab^3 + b^4$$

$$(3a^2)^2 = 9a^4$$

$$0$$

$$(6a^2 + 4ab)\ 4ab = 24a^3b + 16a^2b^2$$

$$-6a^2b^2 - 8ab^3 + b^4$$

$$(6a^2 + 8ab - b^2) \cdot -b^2 = -6a^2b^2 - 8ab^3 + b^4$$

$$0$$

$$(a^2 - b^2)\, x^2 - \frac{(a-b)(2c+ad)+(a+b)\,c}{d}\, x$$

$$= -\frac{2c^2}{d^2} - \frac{ac}{d} = -\frac{2c^2+acd}{d^2}$$

ober $$x^2 - \frac{(a-b)(2c+ad)+(a+b)\,c}{d\,(a^2-b^2)}\, x$$

$$= -\frac{2c^2+acd}{d^2\,(a^2-b^2)}$$

alſo $$x^2 - \frac{(a-b)(2c+ad)+(a+b)\,c}{d\,(a^2-b^2)}\, x$$

$$+ \left[\frac{(a-b)(2c+ad)+(a+b)\,c}{2d\,(a^2-b^2)}\right]^2$$

$$= \left[\frac{(a-b)(2c+ad)+(a+b)\,c}{2d\,(a^2-b^2)}\right]^2 - \frac{2c^2+acd}{d^2(a^2-b^2)}$$

$$= \frac{(3ac-bc+a^2d-abd)^2}{4d^2\,(a^2-b^2)^2} - \frac{2c^2+acd}{d^2\,(a^2-b^2)}$$

$$= \frac{(3ac-bc+a^2d-abd)^2-(2c^2+acd)(4a^2-4b^2)}{4d^2\,(a^2-b^2)^2}$$

Verrichtet man beim Zähler dieſes Bruches die Multiplication wirklich, und ziehet aus beiden Theilen der Gleichung die Quadratwurzel, ſo erhält man

$$x - \frac{(a-b)\;(2c+ad)+(a+b)\;c}{2d\;(a^2-b^2)}$$

$$= \pm \sqrt{\frac{\left\{\begin{matrix} a^4d^2-2a^3bd^2+2a^3cd+a^2c^2+a^2b^2d^2 \\ -8a^2bcd-6abc^2+6ab^2cd+9b^2c^2 \end{matrix}\right\}}{[2d\;(a^2-b^2)]^2}}$$

$$= \pm \frac{a^2d-abd+ac-3bc}{2d\;(a^2-b^2)}$$ *)

---

*) Dieſe Quadratwurzel findet man auf die Art, wie in der vorigen Aufgabe.

$$\text{folgl. } x = \frac{a^2d-abd+ac-3bc}{2d\ (a^2-b^2)} + \frac{(a-b)(2c+ad)+(a+b)c}{2d\ (a^2-b^2)}$$

$$= \frac{3ac - bc + a^2d - abd + a^2d - abd + ac - 3bc}{2d\ (a^2-b^2)}$$

$$= \frac{4ac - 4bc + 2a^2d - 2abd}{2d\ (a^2-b^2)}$$

$$= \frac{4c\ (a-b) + 2ad\ (a-b)}{2d\ (a^2-b^2)} = \frac{(4c+2ad)\ (a-b)}{2d\ (a^2-b^2)}$$

$$= \frac{2\ (2c+ad)\ (a-b)}{2d\ (a+b)\ (a-b)} = \frac{2c+ad}{d(a+b)}$$

$$\text{od. } x = -\frac{a^2d-abd+ac-3bc}{2d\ (a^2-b^2)} + \frac{(a-b)(2c+ad)+(a+b)c}{2d\ (a^2-b^2)}$$

$$= \frac{2ac+2bc}{2d\ (a^2-b^2)} = \frac{2c\ (a+b)}{2d(a-b)(a+b)}$$

$$= \frac{c}{d\ (a-b)}$$

31. Gleichung.

$$32a^{2m}c^{n-1} + 4a^{m+3}c^{n-1}(ac^3-2)x = a^7c^{n+2}x^2$$

Auflösung.

Man ordne die Gleichung und dividire mit dem Coefficienten von x^2, so ist

$$x^2 - \frac{4a^{m+3}c^{n-1}\ (ac^3-2)x}{a^7c^{n+2}} = \frac{32a^{2m}c^{n-1}}{a^7c^{n+2}}$$

Dividirt man die Zähler wirklich durch den Nenner a^7c^{n+2}, indem man nämlich die Exponenten von a und c in dem Nenner, 7 und $n+2$, von den Exponenten derselben Buchstaben in dem Zähler, $m+3$, $n-1$, $2m$, $n-1$, abziehet, so erhält man

$$x^2 - 4a^{m-4}c^{-3}\ (ac^3-2)\ x = 32a^{2m-7}c^{-3}$$

oder $x^2 - 4a^{m-4}c^{-3}(ac^3-2)x + [2a^{m-4}c^{-3}(ac^3-2)]^2$

$= 32a^{2m-7}c^{-3} + [2a^{m-4}c^{-3}(ac^3-2)]^2$

$= 32a^{2m-7}c^{-3} + (2a^{m-3} - 4a^{m-4}c^{-3})^2$

$= 32a^{2m-7}c^{-3} + 4a^{2m-6} - 16a^{2m-7}c^{-3} + 16a^{2m-8}c^{-6}$

$= 4a^{2m-6} + 16a^{2m-7}c^{-3} + 16a^{2m-8}c^{-6}$

also $x - 2a^{m-4}c^{-3}(ac^3-2)$

$= \pm \sqrt{(4a^{2m-6} + 16a^{2m-7}c^{-3} + 16a^{2m-8}c^{-6})}$

$= \pm (2a^{m-3} + 4a^{m-4}c^{-3})$

folgl. $x = 2a^{m-3} + 4a^{m-4}c^{-3} + 2a^{m-3} - 4a^{m-4}c^{-3}$

$= 4a^{m-3}$

oder $x = -2a^{m-3} - 4a^{m-4}c^{-3} + 2a^{m-3} - 4a^{m-4}c^{-3}$

$= -8a^{m-4}c^{-3} = -\frac{8a^{m-4}}{c^3}$

32. Gleichung.

$$cx + \frac{ac}{a+b} = (a+b)\, x^2$$

Auflösung.

Man ordne die Gleichung und dividire sie durch den Coefficienten von x^2, so ist

$$x^2 - \frac{cx}{a+b} = \frac{ac}{(a+b)^2}$$

oder $x^2 - \frac{cx}{a+b} + \left(\frac{c}{2(a+b)}\right)^2$

$$= \left(\frac{c}{2(a+b)}\right)^2 + \frac{ac}{(a+b)^2} = \frac{c^2+4ac}{4(a+b)^2}$$

also $x - \frac{c}{2(a+b)} = \pm \sqrt{\frac{c^2+4ac}{4(a+b)^2}}$

folgl. $x = \frac{c + \sqrt{(c^2 + 4ac)}}{2(a+b)}$

oder $x = \frac{c - \sqrt{(c^2 + 4ac)}}{2(a+b)}$

33. Gleichung.

$$9a^4b^4x^2 - 6a^3b^2x - b^2 = 0$$

Auflösung.

Ordnet man die Gleichung, und dividirt sie durch den Coefficienten von x^2, so ist

$$x^2 - \frac{2x}{3ab^2} = \frac{1}{9a^4b^2}$$

und $x^2 - \frac{2x}{3ab^2} + \left(\frac{1}{3ab^2}\right)^2 = \frac{1}{9a^4b^2} + \left(\frac{1}{3ab^2}\right)^2$

$$= \frac{a^2 + b^2}{9a^4b^4}$$

also $x - \frac{1}{3ab^2} = \pm\sqrt{\frac{a^2+b^2}{9a^4b^4}}$

folgl. $x = \frac{a + \sqrt{(a^2 + b^2)}}{3a^2b^2}$

oder $x = \frac{a - \sqrt{(a^2 + b^2)}}{3a^2b^2}$

34. Gleichung.

$$abx^2 - 2x(a+b)\sqrt{ab} = (a-b)^2$$

Auflösung.

Ordnet man die Gleichung, und dividirt sie durch den Coefficienten von x^2, so ist

$$x^2 - \frac{(2(a+b)\sqrt{ab})x}{ab} = \frac{(a-b)^2}{ab}$$

und $x^2 - \frac{(2(a+b)\sqrt{ab})x}{ab} + \left[\frac{(a+b)\sqrt{ab}}{ab}\right]^2$

$$= \frac{(a-b)^2}{ab} + \left[\frac{(a+b)\sqrt{ab}}{ab}\right]^2$$

$$= \frac{(a^2-2ab+b^2)ab+(a^2+2ab^2+b^2)ab}{a^2b^2} = \frac{2a^2+2b^2}{ab}$$

also $x - \frac{(a+b)\sqrt{ab}}{ab} = \pm\sqrt{\frac{2a^2+2b^2}{ab}}$

folgl. $x = \frac{(a+b)\sqrt{ab}}{ab\ *)} \pm \sqrt{\frac{2a^2+2b^2}{ab}}$

$$= \frac{a+b \pm \sqrt{(2a^2+2b^2)}}{\sqrt{ab}}$$

35. Gleichung.

$$ax^2 + b^2 + c^2 = a^2 + 2bc + 2(b-c)x\sqrt{a}$$

Auflösung.

Man ordne die Gleichung, so ist

$$ax^2 - 2(b-c)x\sqrt{a} = a^2 + 2bc - b^2 - c^2$$

Man dividire mit dem Coefficienten von x^2, so ist

$$x^2 - \frac{2(b-c)x\sqrt{a}}{a} = \frac{a^2+2bc-b^2-c^2}{a}$$

oder $x^2 - \frac{2(b-c)x}{\sqrt{a}}\ **) = \frac{a^2+2bc-b^2-c^2}{a}$

---

*) Um diese Reduction zu erhalten, verwandle man den Nenner ab in $\sqrt{ab} . \sqrt{ab}$, alsdann ist

$$\frac{(a+b)\sqrt{ab}}{ab} = \frac{(a+b)\sqrt{ab}}{\sqrt{ab}\sqrt{ab}} = \frac{a+b}{\sqrt{ab}}$$

**) Es ist $\frac{\sqrt{a}}{a} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}\sqrt{a}} = \frac{1}{\sqrt{a}}$

$$x^2 - \frac{2(b-c)x}{\sqrt{a}} + \frac{(b-c)^2}{a} = \frac{a^2+2bc-b^2-c^2}{a} + \frac{(b-c)^2}{a}$$

$$= \frac{a^2+2bc-b^2-c^2+b^2-2bc+c^2}{a} = \frac{a^2}{a} = a$$

$$\text{alſo } x - \frac{b-c}{\sqrt{a}} = \pm\sqrt{a}$$

$$\text{folgl. } x = \frac{b-c}{\sqrt{a}} + \sqrt{a} = \frac{b-c+\sqrt{a}\cdot\sqrt{a}}{\sqrt{a}} = \frac{b-c+a}{\sqrt{a}}$$

$$\text{oder } x = \frac{b-c}{\sqrt{a}} - \sqrt{a} = \frac{b-c-a}{\sqrt{a}}$$

36. Gleichung.

$$cx^2 - 2cx\sqrt{d} = dx^2 - cd$$

Auflöſung.

Man ordne die Gleichung, ſo iſt

$$(c-d)x^2 - 2cx\sqrt{d} = -cd$$

Dieſe Gleichung durch den Coefficienten von x^2 dividirt, giebt

$$x^2 - \frac{2cx\sqrt{d}}{c-d} = -\frac{cd}{c-d}$$

$$\text{oder } x^2 - \frac{2cx\sqrt{d}}{c-d} + \left(\frac{c\sqrt{d}}{c-d}\right)^2 = \left(\frac{c\sqrt{d}}{c-d}\right)^2 - \frac{cd}{c-d}$$

$$= \frac{(c\sqrt{d})^2}{(c-d)^2} - \frac{cd}{c-d} = \frac{c^2d - c^2d + cd^2}{(c-d)^2} = \frac{cd^2}{(c-d)^2}$$

Ziehet man aus beiden Theilen der Gleichung die Quadratwurzel, ſo iſt

$$x - \frac{c\sqrt{d}}{c-d} = \pm\frac{\sqrt{cd^2}}{\sqrt{(c-d)^2}} = \pm\frac{d\sqrt{c}}{c-d}$$

folgl. $x = \frac{c\sqrt{d} + d\sqrt{c}}{c - d} = \frac{\sqrt{c}\cdot\sqrt{c}\cdot\sqrt{d} + \sqrt{d}\cdot\sqrt{d}\cdot\sqrt{c}}{(\sqrt{c} + \sqrt{d})(\sqrt{c} - \sqrt{d})}$ *)

$$= \frac{\sqrt{c}\cdot\sqrt{cd} + \sqrt{d}\cdot\sqrt{cd}}{(\sqrt{c} + \sqrt{d})(\sqrt{c} - \sqrt{d})} = \frac{(\sqrt{c} + \sqrt{d})\sqrt{cd}}{(\sqrt{c} + \sqrt{d})(\sqrt{c} - \sqrt{d})}$$

$$= \frac{\sqrt{cd}}{\sqrt{c} - \sqrt{d}}$$

oder $x = \frac{c\sqrt{d} - d\sqrt{c}}{c - d} = \frac{\sqrt{c}\cdot\sqrt{c}\cdot\sqrt{d} - \sqrt{d}\cdot\sqrt{d}\cdot\sqrt{c}}{(\sqrt{c} + \sqrt{d})(\sqrt{c} - \sqrt{d})}$

$$= \frac{\sqrt{c}\cdot\sqrt{cd} - \sqrt{d}\cdot\sqrt{cd}}{(\sqrt{c} + \sqrt{d})(\sqrt{c} - \sqrt{d})} = \frac{(\sqrt{c} - \sqrt{d})\sqrt{cd}}{(\sqrt{c} - \sqrt{d})(\sqrt{c} + \sqrt{d})}$$

$$= \frac{\sqrt{cd}}{\sqrt{c} + \sqrt{d}}$$

37. Gleichung.

$$(4a^2 - 9cd^2)x^2 + (4a^2c^2 + 4abd^2)x + (ac^2 + bd^2)^2 = 0$$

Auflösung.

Man ordne zuvörderst die Gleichung, so ist
$(4a^2 - 9cd^2)x^2 + (4a^2c^2 + 4abd^2)x = -(ac^2 + bd^2)^2$
Nun setze man $4a^2 - 9cd^2 = A$, und $ac^2 + bd^2 = B$ **) so ist

*) Die Verwandlung des Zählers beruhet darauf, daß $c = \sqrt{c}\cdot\sqrt{c}$ und $d = \sqrt{d}\cdot\sqrt{d}$. Was die Verwandlung des Nenners betrifft, so gründet sie sich auf den bekannten Satz, daß die Differenz zweier Quadrate dem Produkte aus der Summe ihrer Wurzeln in die Differenz derselben gleich ist. Da nun die Quadratwurzeln von c und d, $\sqrt{c}$ und $\sqrt{d}$ sind, so muß auch $c - d = (\sqrt{c} + \sqrt{d})(\sqrt{c} - \sqrt{d})$ sein.

**) Bevor man zur Auflösung einer Gleichung schreitet, muß man sich mit der Natur derselben bekannt machen, und untersuchen, ob man nicht auf einem kürzern Wege als auf dem gewöhnlichen zum Resultat gelangen könne. Die Folge wird lehren, daß man sehr oft durch solche Betrachtungen den weitläuftigsten und schwie-

$$Ax^2 + 4aBx \;{}^{*)} = -B^2$$

oder $$x^2 + \frac{4aBx}{A} = -\frac{B^2}{A}$$

und $$x^2 + \frac{4aBx}{A} + \left(\frac{2aB}{A}\right)^2 = -\frac{B^2}{A} + \left(\frac{2aB}{A}\right)^2$$

$$= \frac{-AB^2 + 4a^2B^2}{A^2} = \frac{(4a^2 - A)B^2}{A^2}$$

also $$x + \frac{2aB}{A} = \pm\sqrt{\frac{(4a^2 - A)B^2}{A^2}} = \frac{\pm B\sqrt{(4a^2 - A)}}{A}$$

folgl. $$x = \frac{-2aB + B\sqrt{(4a^2 - A)}}{A}$$

$$= \frac{-2aB + B\sqrt{(4a^2 - 4a^2 + 9cd^2)}}{4a^2 - 9cd^2} = \frac{-2aB + B\sqrt{9cd^2}}{4a^2 - 9cd^2}$$

$$= \frac{-B(2a - 3d\sqrt{c})}{(2a - 3d\sqrt{c})(2a + 3d\sqrt{c}) \;{}^{**)}} = -\frac{B}{2a + 3d\sqrt{c}}$$

$$= -\frac{ac^2 + bd^2}{2a + 3d\sqrt{c}}$$

---

rigsten Rechnungen ausweichen kann. — Es ist übrigens nicht leicht, unter den vielen Hülfsmitteln und Kunstgriffen, welche der Calcul in schwierigen Fällen darbietet, gerade diejenigen zu wählen, die am schnellsten zum Ziele führen, und die das Resultat in der geschmeidigsten Form darstellen; nur durch stetes Nachdenken und Uebung wird man sich endlich die gehörige Fertigkeit bei Anwendung solcher Hülfsmittel verschaffen. In gegenwärtiger Auflösung ist es einleuchtend, daß durch die Einführung der Buchstaben A und B die Rechnungsoperation äußerst erleichtert und abgekürzt wird, indem man im Laufe der Rechnung nur mit zwei Buchstaben zu thun hat, deren Werth erst beim Schlusse der Auflösung realisirt wird.

*) Denn es ist
$(4a^2c^2 + 4abd^2)x = 4a(ac^2 + bd^2)x = 4aBx$

**) Siehe Anmerkung zur 36sten Gleichung.

oder $x = \frac{-2aB - B\sqrt{(4a^2 - A)}}{A} = \frac{-2aB - B\sqrt{9cd^2}}{4a^2 - 9cd^2}$

$$= \frac{-B(2a + 3d\sqrt{c})}{(2a - 3d\sqrt{c})(2a + 3d\sqrt{c})} = -\frac{B}{2a - 3d\sqrt{c}}$$

$$= -\frac{ac^2 + bd^2}{2a - 3d\sqrt{c}}$$

Um sich von dem Vortheile, welchen diese Auflösungsart gewährt, zu überzeugen, mag hier die Auflösung nach der gewöhnlichen Art folgen.

Es ist

$$(4a^2 - 9cd^2)\, x^2 + (4a^2c^2 + 4abd^2)\, x$$
$$= -(ac^2 + bd^2)^2$$

Dividirt man mit dem Coefficienten von x^2, so erhält man

$$x^2 + \frac{4a^2c^2 + 4abd^2}{4a^2 - 9cd^2}\, x = -\frac{(ac^2 + bd^2)^2}{4a^2 - 9cd^2}$$

und $x^2 + \frac{4a^2c^2 + 4abd^2}{4a^2 - 9cd^2}\, x + \left(\frac{2a^2c^2 + 2abd^2}{4a^2 - 9cd^2}\right)^2$

$$= \left(\frac{2a^2c^2 + 2abd^2}{4a^2 - 9cd^2}\right)^2 - \frac{(ac^2 + bd^2)^2}{4a^2 - 9cd^2}$$

$$= \frac{(2a^2c^2 + 2abd^2)^2 - (ac^2 + bd^2)^2\,(4a^2 - 9cd^2)}{(4a^2 - 9cd^2)^2}$$

$$= \frac{\left\{\begin{matrix} 4a^4c^4 + 8a^3bc^2d^2 + 4a^2b^2d^4 - 4a^4c^4 - 8a^3bc^2d^2 \\ -4a^2b^2d^4 + 9a^2c^5d^2 + 18abc^3d^4 + 9b^2cd^6 \end{matrix}\right\}}{(4a^2 - 9cd^2)^2}$$

$$= \frac{9a^2c^5d^2 + 18abc^3d^4 + 9b^2cd^6}{(4a^2 - 9cd^2)^2}$$

Ziehet man aus beiden Theilen der Gleichung die Quadratwurzel, so ist

$$x + \frac{2a^2c^2 + 2abd^2}{4a^2 - 9cd^2} = \pm \frac{3ac^2d\sqrt{c} + 3bd^3\sqrt{c}}{4a^2 - 9cd^2}$$

folgl. $x = \frac{3ac^2d\sqrt{c} + 3bd^3\sqrt{c} - 2a^2c^2 - 2abd^2}{4a^2 - 9cd^2}$

$$= \frac{(ac^2 + bd^2)\ 3d\sqrt{c} - (ac^2 + bd^2)\ 2a}{4a^2 - 9cd^2}$$

$$= -\frac{(ac^2 + bd^2)\ (2a - 3d\sqrt{c})}{(2a - 3d\sqrt{c})\ (2a + 3d\sqrt{c})} = -\frac{ac^2 + bd^2}{2a + 3d\sqrt{c}}$$

oder $x = -\frac{(ac^2 + bd^2)\ 3d\sqrt{c} + 2a(ac^2 + bd^2)}{4a^2 - 9cd^2}$

$$= -\frac{(2a + 3d\sqrt{c})\ (ac^2 + bd^2)}{(2a + 3d\sqrt{c})\ (2a - 3d\sqrt{c})} = -\frac{ac^2 + bd^2}{2a - 3d\sqrt{c}}$$

38. Gleichung.

$$ab^3x^2 + (1 + c)\,bd\sqrt{c} + cb^2x^2$$
$$= [b^3d\sqrt{c} + (ab + c)\ (1 + c)]\,x$$

Auflösung.

Man ordne die Gleichung, so ist

$$(ab^3 + cb^2)x^2 - [b^3d\sqrt{c} + (ab + c)\ (1 + c)]x$$
$$= -\ (1 + c)\ bd\sqrt{c}$$

Nun setze man $ab + c = A$, $1 + c = B$, $bd\sqrt{c} = C$, so ist

$$b^2Ax^2 - (b^2C + AB)x = -BC$$

oder $x^2 - \frac{(b^2C + AB)x}{b^2A} = -\frac{BC}{b^2A}$

$$\text{und } x^2 - \frac{(b^2C+AB)x}{b^2A} + \left(\frac{b^2C+AB}{2b^2A}\right)^2$$

$$= \left(\frac{b^2C+AB}{2b^2A}\right)^2 - \frac{BC}{b^2A}$$

$$= \frac{b^4C^2+2b^2ABC+A^2B^2}{4b^4A^2} - \frac{BC}{b^2A}$$

$$= \frac{b^4C^2-2b^2ABC+A^2B^2}{4b^4A^2}$$

Da man nun aus diesem Bruch sehr leicht die Quadratwurzel ausziehen kann, so ist

$$x - \frac{b^2C+AB}{2b^2A} = \pm \frac{b^2C-AB}{2b^2A}$$

$$\text{folgl. } x = \frac{b^2C-AB+b^2C+AB}{2b^2A} = \frac{2b^2C}{2b^2A} = \frac{C}{A} = \frac{bd\sqrt{c}}{ab+c}$$

$$\text{oder } x = \frac{b^2C+AB-b^2C+AB}{2b^2A} = \frac{2AB}{2b^2A} = \frac{B}{b^2} = \frac{1+c}{b^2}$$

39. Gleichung.

$$\frac{5a+10ab^2}{9b^2-3a^2b^2}x^2 - \left[\frac{5\sqrt{(a+b)}}{3b^3} + \frac{(1+2b^2)\,cd\sqrt{c}}{3-a^2}\right]x$$

$$+\frac{cd}{ab}\sqrt{c(a+b)} = 0$$

Auflösung.*)

Man ordne die Gleichung, so erhält man

---

*) Wollte man diese Gleichung auf dem gewöhnlichen Wege auflösen, so würde man sich in eine überaus weitläuftige und ermüdende Rechnung einlassen müssen. Solche verwickelte Rechnungen aber sind nicht allein höchst verdrießlich, sondern auch sehr zeitraubend, indem man bei der Aufsuchung der begangenen Fehler, welche hier ganz unvermeidlich sind, sehr oft mehrere Stunden zubringen,

$$\frac{5a+10ab^2}{9b^2-3a^2b^2}x^2-\left[\frac{5\sqrt{(a+b)}}{3b^3}+\frac{(1+2b^2)\,cd\sqrt{c}}{3-a^2}\right]x$$
$$=-\frac{cd}{ab}\sqrt{c\,(a+b)}$$

Nun setze man $1+2b^2=A$, $\sqrt{(a+b)}=B$, $3-a^2=C$, $cd\sqrt{c}=D$, so ist

$$\frac{5aA}{3b^2C}x^2\,{}^{*)}-\left(\frac{5B}{3b^3}+\frac{AD}{C}\right)x=-\frac{DB}{ab}$$

oder $x^2-\frac{3b^2C}{5aA}\left(\frac{5B}{3b^3}+\frac{AD}{C}\right)x=-\frac{DB}{ab}\cdot\frac{3b^2C}{5aA}$

$$x^2-\frac{5BC+3b^3AD}{5abA}x=-\frac{3bBCD}{5a^2A}$$

und $x^2-\frac{5BC+3b^3AD}{5abA}x+\left(\frac{5BC+3b^3AD}{10abA}\right)^2$

$$=\left(\frac{5BC+3b^3AD}{10abA}\right)^2-\frac{3bBCD}{5a^2A}$$
$$=\frac{(5BC+3b^3AD)^2-20b^2A\cdot3bBCD}{100a^2b^2A^2}$$
$$=\frac{25B^2C^2+30b^3ABCD+9b^6A^2D^2-60b^3ABCD}{100a^2b^2A^2}$$
$$=\frac{25B^2C^2-30b^3ABCD+9b^6A^2D^2}{100a^2b^2A^2}$$

---

und alsdann den beschwerlichen Weg noch einmal vornehmen muß. Bei der hier gewählten Auflösungsart hat man alle Schwierigkeiten vermieden, und das Resultat auf die kürzeste Weise gefunden.

*) Denn es ist

$$\frac{5a+10ab^2}{9b^2-3a^2b^2}x^2=\frac{5a\,(1+2b^2)}{3b^2\,(3-a^2)}x^2=\frac{5aA}{3b^2C}x^2$$

Ziehet man aus beiden Theilen der Gleichung die Quadratwurzel, so erhält man

$$x - \frac{5BC + 3b^3AD}{10abA} = \pm \frac{5BC - 3b^3AD}{10abA}$$

folgl. $x = \frac{5BC + 3b^3AD + 5BC - 3b^3AD}{10abA} = \frac{10BC}{10abA}$

$$= \frac{BC}{abA} = \frac{(3-a^2)\sqrt{(a+b)}}{ab(1+2b^2)}$$

oder $x = \frac{5BC + 3b^3AD - 5BC + 3b^3AD}{10abA} = \frac{6b^3AD}{10abA}$

$$= \frac{3b^2D}{5a} = \frac{3b^2cd\sqrt{c}}{5a}$$

40. Gleichung.

$$ax = b + \sqrt{cx}$$

Auflösung.

Zuvörderst setze man

$$ax - b = \sqrt{cx}\ *)$$

Man erhebe beide Theile der Gleichung zum Quadrat, so ist

$$a^2x^2 - 2abx + b^2 = cx$$

oder $a^2x^2 - (2ab + c)x = -b^2$

Dividirt man ferner mit dem Coefficienten von x^2, so erhält man

$$x^2 - \frac{2ab + c}{a^2}x = -\frac{b^2}{a^2}$$

*) Man schafft b auf die andere Seite der Gleichung, damit beim nachherigen Quadriren die Gleichung rational werde.

oder $x^2 - \frac{2ab+c}{a^2}x + \left(\frac{2ab+c}{2a^2}\right)^2 = \left(\frac{2ab+c}{2a^2}\right)^2 - \frac{b^2}{a^2}$

$$= \frac{(2ab+c)^2 - 4a^2b^2}{4a^4}$$

$$= \frac{4a^2b^2 + 4abc + c^2 - 4a^2b^2}{4a^4} = \frac{4abc + c^2}{4a^4}$$

Ziehet man aus beiden Theilen die Quadratwurzel, so ist

$$x - \frac{2ab+c}{2a^2} = \pm \frac{\sqrt{(4abc+c^2)}}{2a^2}$$

$$\text{folgl. } x = \frac{2ab + c + \sqrt{(4abc + c^2)}}{2a^2}$$

Der andere Werth für x gilt für die Gleichung

$$ax = b - \sqrt{cx}$$

(Siehe M. H. Sammlung ꝛc. S. 140 Anmerk.)

41. Gleichung.

$$3\sqrt{(112 - 8x)} = 19 + \sqrt{(3x+7)}$$

Auflösung.

Man erhebe beide Theile der Gleichung zum Quadrat, so ist

$$9 \cdot 112 - 9 \cdot 8x = 19^2 + 2 \cdot 19\sqrt{(3x+7)} + 3x + 7$$

$$\text{oder } -(9 \cdot 8x + 3x) + 9 \cdot 112 - 19^2 - 7$$

$$= 2 \cdot 19\sqrt{(3x+7)}$$

$$-75x + 640 = 38\sqrt{(3x+7)}$$

hierdurch hat man nun eine Wurzelgröße aus der Gleichung weggeschafft.

Man erhebe abermals beide Theile zum Quadrat, so erhält man

$$75^2x^2 - 2 \cdot 75 \cdot 640x + 640^2 = 38^2(3x + 7)$$

oder $5625x^2 - 96000x + 409600 = 4332x + 10108$

also $5625x^2 - 100332x = -399492$

durch 9 dividirt, giebt

$$625x^2 - 11148x = -44388$$

oder $x^2 - \frac{11148x}{625} = -\frac{44388}{625}$

und $x^2 - \frac{11148x}{625} + \left(\frac{5574}{625}\right)^2 = \left(\frac{5574}{625}\right)^2 - \frac{44388}{625}$

$$= \frac{5574^2 - 625 \cdot 44388}{625^2} = \frac{3326976}{625^2}$$

Ziehet man aus beiden Theilen der Gleichung die Quadratwurzel, so ist

$$x - \frac{5574}{625} = \pm \frac{1824}{625}$$

folgl. $x = \frac{5574 - 1824}{625} = 6$

42. Gleichung.

$$\sqrt{(2x + 7)} + \sqrt{(3x - 18)} = \sqrt{(7x + 1)}$$

Auflösung.

Erhebt man beide Theile der Gleichung zum Quadrat, so ist

$$2x + 7 + 2\sqrt{(2x + 7)(3x - 18)} + 3x - 18 = 7x + 1$$

oder $2x + 12 = 2\sqrt{(2x + 7)(3x - 18)}$

durch 2 dividirt, giebt

$$x + 6 = \sqrt{(2x + 7)(3x - 18)}$$

Auf diese Art sind nun zwei irrationale Größen zu gleicher Zeit aus der Gleichung verschwunden.

Erhebt man abermals beide Theile zum Quadrat, so erhält man

$$x^2 + 12x + 36 = (2x + 7)(3x - 18)$$
$$= 6x^2 - 15x - 126$$
$$\text{oder } 5x^2 - 27x = 162$$
$$\text{also } x^2 - \frac{27x}{5} = \frac{162}{5}$$
$$\text{und } x^2 - \frac{27x}{5} + \left(\frac{27}{10}\right)^2 = \left(\frac{27}{10}\right)^2 + \frac{162}{5} = \frac{729 + 3240}{100}$$
$$= \frac{3969}{100}$$

Ziehet man aus beiden Theilen die Quadratwurzel, so erhält man

$$x - \frac{27}{10} = \pm \frac{63}{10}$$
$$\text{folgl. } x = \frac{27 + 63}{10} = \frac{90}{10} = 9$$

43. Gleichung.

$$5\sqrt{(62 + 3x)} - \tfrac{1}{2}\sqrt{(95\tfrac{2}{3} - 5x)} = 41$$

Auflösung.

Die Auflösung dieser Gleichung, welche mit der 41sten in Hinsicht der darin vorkommenden Wurzelgrößen völlig gleich ist, wird eben so wie dort behandelt. Man schafft nämlich die eine Wurzelgröße auf die andere Seite, wodurch man

$$5\sqrt{(62 + 3x)} = 41 + \tfrac{1}{2}\sqrt{(95\tfrac{2}{3} - 5x)}$$

erhält. Alsdann erhebt man beide Theile der Gleichung zum Quadrat, welches

$$25(62+3x) = 41^2 + \frac{1}{4}(95\tfrac{2}{3} - 5x) + 41\sqrt{(95\tfrac{2}{3} - 5x)}$$

giebt. Man löst die Klammern auf, und schafft die Brüche weg, so erhält man

$$915x - 1859 = 492\sqrt{(95\tfrac{2}{3} - 5x)}$$

Man quadrirt die Gleichung, und ordnet sie

$$837225x^2 - 2191650x = 19701575$$

$$\text{oder } x^2 - \frac{29222}{11163}x = \frac{788063}{11163 \times 3}$$

$$\text{oder } x^2 - \frac{29222}{11163}x + \left(\frac{14611}{11163}\right)^2 = \frac{788063}{11163 \times 3} + \left(\frac{14611}{11163}\right)^2$$

$$= \frac{788063 \times 11163 + 14611 \times 14611 \times 3}{11163 \times 11163 \times 3}$$

$$= \frac{9437591232}{11163 \times 11163 \times 3} = \frac{3145863744}{11163^2}$$

Man ziehet die Quadratwurzel aus

$$x - \frac{14611}{11163} = \frac{56088}{11163}$$

$$\text{folgl. } x = 6\tfrac{1}{3}$$

44. Gleichung.

$$7\sqrt{(\tfrac{3}{2}x - 5)} - \sqrt{\left(\frac{x}{5} + 45\right)} - \tfrac{7}{4}\sqrt{(10x + 56)} = 0$$

Auflösung.

Um zwei Wurzelgrößen weg zu schaffen, ordnet man zuerst die Gleichung so:

$$7\sqrt{(\tfrac{3}{2}x - 5)} = \sqrt{\left(\frac{x}{5} + 45\right)} + \tfrac{7}{4}\sqrt{(10x + 56)}$$

und quadrirt sie

$$49\left(\tfrac{8}{2}x-5\right)=\frac{x}{5}+45+\tfrac{7}{2}\sqrt{\left[(10x+56)\left(\frac{x}{5}+45\right)\right]}$$
$$+\frac{49}{16}(10x+56)$$

Man löst die Klammern auf, und schafft die Brüche weg

$$1707x-18460=140\sqrt{(2x^2+461\tfrac{1}{5}x+2520)}$$

Man quadrirt die Gleichung, um das letzte Wurzelzeichen weg zu schaffen

$$2874649x^2-72061960x=-291379600$$

oder $x^2-\frac{72061960}{2874649}x=-\frac{837614075760400}{2874649^2}$

oder

$$x^2-\frac{72061960}{2874649}x+\left(\frac{36030980}{2874649}\right)^2=\frac{460617444000000}{2874649^2}$$

Man ziehet die Quadratwurzel aus

$$x-\frac{36030980}{2874649}=\frac{21462000}{2874649}$$

folgl. $x=20$

45. Gleichung.

$$ax^{2n}+bx^n=c$$

Auflösung.

Man dividire mit dem Coefficienten a, so ist

$$x^{2n}+\frac{bx^n}{a}=\frac{c}{a}$$

oder $(x^n)^2+\frac{bx^n}{a}=\frac{c}{a}$

Da diese Gleichung nun die gewöhnliche Form einer unreinen quadratischen Gleichung erhalten hat, so läßt sie sich auch auf die bekannte Art auflösen. Es ist nämlich

$$(x^n)^2 + \frac{bx^n}{a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a} = \frac{b^2 + 4ac}{4a^2}$$

$$\text{oder } x^n + \frac{b}{2a} = \pm\sqrt{\frac{b^2 + 4ac}{4a^2}} = \pm\frac{\sqrt{(b^2 + 4ac)}}{2a}$$

$$\text{also } x^n = \frac{-b \pm \sqrt{(b^2 + 4ac)}}{2a}$$

$$\text{folgl. } x = \sqrt[n]{\frac{-b + \sqrt{(b^2 + 4ac)}}{2a}}$$

$$\text{oder } x = \sqrt[n]{\frac{-b - \sqrt{(b^2 + 4ac)}}{2a}}$$

46. Gleichung.

$$x^4 - 74x^2 = -1225$$

Auflösung.

Diese Gleichung läßt sich auf die Form

$$(x^2)^2 - 74x^2 = -1225$$

bringen, und ist daher nur ein specieller Fall von der vorhergehenden allgemeinen Gleichung. Denn es ist

$$a = 1,\ n = 2,\ b = -74,\ c = -1225$$

Substituirt man daher diese bestimmten Größen in die allgemeine Formel

$$x = \sqrt[n]{\frac{-b \pm \sqrt{(b^2 + 4ac)}}{2a}}$$

so erhält man .

$$x = \pm\sqrt{\frac{74 + \sqrt{(74^2 - 4 \cdot 1225)}}{2}} = \pm\sqrt{\frac{74 + \sqrt{576}}{2}}$$

$$= \pm\sqrt{(37 + 12)} = \pm\sqrt{49} = \pm 7$$

oder $x = \pm\sqrt{\frac{74 - \sqrt{(74^2 - 4 \cdot 1225)}}{2}} = \pm\sqrt{\frac{74 - \sqrt{576}}{2}}$

$$= \pm\sqrt{(37 - 12)} = \pm\sqrt{25} = \pm 5$$

47. Gleichung.

$$3x^6 + 42x^3 = 3321$$

Auflösung.

In dieser Gleichung ist

$$n = 3,\ a = 3,\ b = 42,\ c = 3321$$

Es ist daher

$$x = \sqrt[3]{\frac{-42 + \sqrt{(42^2 + 4 \cdot 3 \cdot 3321)}}{2 \cdot 3}} = \sqrt[3]{\frac{+204 - 42}{6}}$$

$$= \sqrt[3]{(34 - 7)} = \sqrt[3]{27} = 3$$

oder $x = \sqrt[3]{\frac{-42 - \sqrt{(42^2 + 4 \cdot 3 \cdot 3321)}}{2 \cdot 3}} = \sqrt[3]{\frac{-204 - 42}{6}}$

$$= \sqrt[3]{(-34 - 7)} = \sqrt[3]{-41} = -\sqrt[3]{41}\ ^{*)}$$

*) Denn $\sqrt[3]{-41} = \sqrt[3]{-1} \cdot \sqrt[3]{41} = -1\sqrt[3]{41} = -\sqrt[3]{41}$.

IV.

Auflösungen der Gleichungen vom zweiten Grade mit mehreren unbekannten Größen.

---

1. Gleichung.

I. $x^2 + y^2 = a$

II. $x^2 - y^2 = b$

Auflösung.

Addirt man beide Gleichungen, so erhält man

$$2x^2 = a + b$$

folgl. $x = \pm\sqrt{\frac{a+b}{2}}$

Subtrahirt man (II.) von (I.), so ist

$$2y^2 = a - b$$

folgl. $y = \pm\sqrt{\frac{a-b}{2}}$

2. Gleichung.

I. $x + y = a$

II. $xy = b$

1. Auflösung.

Man multiplicire (I.) mit y, so ist

$$xy + y^2 = ay$$

Hiervon die Gleichung (II.) abgezogen, giebt

$$y^2 = ay - b$$

oder $y^2 - ay = -b$

und $y^2 - ay + \frac{a^2}{4} = \frac{a^2}{4} - b = \frac{a^2 - 4b}{4}$

also $y - \frac{a}{2} = \pm \frac{\sqrt{(a^2 - 4b)}}{2}$

folgl. $y = \frac{a \pm \sqrt{(a^2 - 4b)}}{2}$

und $x = a - \frac{a \pm \sqrt{(a^2 - 4b)}}{2} = \frac{2a - a \mp \sqrt{(a^2 - 4b)}}{2}$

$$= \frac{a \mp \sqrt{(a^2 - 4b)}}{2}$$

2. Auflösung.

Da hier die Summe der beiden unbekannten Größen x und y gegeben ist, so kömmt es nur darauf an, ihre Differenz zu finden, weil sich alsdann aus der Summe und der Differenz die Größen selbst herleiten lassen. Man erhebe daher beide Theile der Gleichung (I.) zum Quadrat, und multiplicire (II.) mit 4, so ist

III. $x^2 + 2xy + y^2 = a^2$

IV. $4xy = 4b$

Man subtrahire (IV.) von (III.), so bleibt

$$x^2 - 2xy + y^2 = a^2 - 4b$$

oder $x - y = \pm \sqrt{(a^2 - 4b)}$

Addirt man also diese Gleichung zu (I.), so ist

$$2x = a \pm \sqrt{(a^2 - 4b)}$$

folgl. $x = \frac{a \pm \sqrt{(a^2 - 4b)}}{2}$

Subtrahirt man sie von (I.), so bleibt

$$2y = a \mp \sqrt{(a^2 - 4b)}$$

folgl. $y = \frac{a \mp \sqrt{(a^2 - 4b)}}{2}$

3. Gleichung.

$$\text{I.} \quad x + y = a$$

$$\text{II.} \quad x^2 + y^2 = b$$

1. Auflösung.

Aus (I.) erhält man

$$x = a - y$$

Diesen Werth von x in (II.) substituirt, giebt

$$(a - y)^2 + y^2 = b$$

oder $a^2 - 2ay + y^2 + y^2 = b$

$$2y^2 - 2ay = b - a^2$$

$$y^2 - ay = \frac{b - a^2}{2}$$

und $y^2 - ay + \frac{a^2}{4} = \frac{a^2}{4} + \frac{b - a^2}{2} = \frac{a^2 + 2b - 2a^2}{4}$

$$= \frac{2b - a^2}{4}$$

also $y - \frac{a}{2} = \pm \frac{\sqrt{(2b - a^2)}}{2}$

folgl. $y = \frac{a \pm \sqrt{(2b - a^2)}}{2}$

$$\text{und } x = a - \frac{a \pm \sqrt{(2b - a^2)}}{2} = \frac{2a - a \mp \sqrt{(2b - a^2)}}{2}$$
$$= \frac{a \mp \sqrt{(2b - a^2)}}{2}$$

2. Auflösung.

Da hier ebenfalls die Summe von x und y bekannt ist, so suche man ihre Differenz. Man erhebe nämlich beide Theile der Gleichung (I.) zum Quadrat und multiplicire (II.) mit 2, so ist

$$\text{III.} \quad x^2 + 2xy + y^2 = a^2$$
$$\text{IV.} \quad 2x^2 + 2y^2 = 2b$$

Subtrahirt man (III.) von (IV.), so bleibt

$$x^2 - 2xy + y^2 = 2b - a^2$$
$$\text{oder } x - y = \pm \sqrt{(2b - a^2)}$$

Addirt man also die Gleichung zu (I.), so ist

$$2x = a \pm \sqrt{(2b - a^2)}$$
$$\text{folgl. } x = \frac{a \pm \sqrt{(2b - a^2)}}{2}$$

Subtrahirt man sie von (I.), so bleibt

$$2y = a \mp \sqrt{(2b - a^2)}$$
$$\text{folgl. } y = \frac{a \mp \sqrt{(2b - a^2)}}{2}$$

4. Gleichung.

$$\text{I.} \quad xy = a$$
$$\text{II.} \quad x^2 + y^2 = b$$

1. Auflösung.

Aus (I.) findet man

$$x = \frac{a}{y}$$

Substituirt man diesen Werth von x in (II.), so ist

$$\frac{a^2}{y^2} + y^2 = b$$

oder $a^2 + y^4 = by^2$

$$y^4 - by^2 = -a^2$$

und $y^4 - by^2 + \frac{b^2}{4} = \frac{b^2}{4} - a^2 = \frac{b^2 - 4a^2}{4}$

also $y^2 - \frac{b}{2} = \pm \frac{\sqrt{(b^2 - 4a^2)}}{2}$

oder $y^2 = \frac{b \pm \sqrt{(b^2 - 4a^2)}}{2}$

folgl. $y = \pm \sqrt{\frac{b \pm \sqrt{(b^2 - 4a^2)}}{2}}$

und $x^2 = b - y^2 = b - \frac{b \pm \sqrt{(b^2 - 4a^2)}}{2}$

$$= \frac{2b - b \mp \sqrt{(b^2 - 4a^2)}}{2} = \frac{b \mp \sqrt{(b^2 - 4a^2)}}{2}$$

folgl. $x = \pm \sqrt{\frac{b \mp \sqrt{(b^2 - 4a^2)}}{2}}$

2. Auflösung.

Hier kömmt es darauf an, sowohl die Summe als auch die Differenz von x und y zu finden. Man multiplicire also die Gleichung (I.) mit 2, so ist

III. $2xy = 2a$

Man addire diese Gleichung zu (II.), so erhält man

IV. $x^2 + 2xy + y^2 = b + 2a$

Man subtrahire sie von (II.), so ist

V. $x^2 - 2xy + y^2 = b - 2a$

Aus beiden Theilen der Gleichungen (IV.) und (V.) die Quadratwurzel gezogen, giebt

$$\text{VI.}\quad x + y = \pm\sqrt{(b + 2a)}$$

$$\text{VII.}\quad x - y = \pm\sqrt{(b - 2a)}$$

Addirt man diese Gleichungen, so ist

$$2x = \pm\sqrt{(b + 2a)} \pm \sqrt{(b - 2a)}$$

$$\text{folgl. } x = \frac{\pm\sqrt{(b + 2a)} \pm \sqrt{(b - 2a)}}{2}$$

Subtrahirt man (VII.) von (VI.), so bleibt

$$2y = \pm\sqrt{(b + 2a)} \mp \sqrt{(b - 2a)}$$

$$\text{folgl. } y = \frac{\pm\sqrt{(b + 2a)} \mp \sqrt{(b - 2a)}}{2}$$

Daß übrigens die hier gefundenen Werthe für x und y denen in der ersten Auflösung gleich sind, ergiebt sich aus dem Folgenden. Es ist

$$x = \frac{\pm\sqrt{(b + 2a)} \pm \sqrt{(b - 2a)}}{2}$$

$$\text{also } x^2 = \frac{b + 2a + b - 2a \pm 2\sqrt{[(b + 2a)(b - 2a)]}}{4}$$

$$= \frac{2b \pm 2\sqrt{(b^2 - 4a^2)}}{4} = \frac{b \pm \sqrt{(b^2 - 4a^2)}}{2}$$

$$\text{folgl. } x = \pm\sqrt{\frac{b \pm \sqrt{(b^2 - 4a^2)}}{2}}$$

Auf eine ähnliche Art verfahre man bei dem Werthe für y.

5. Gleichung.

$$\text{I.}\quad x + y = a$$

$$\text{II.}\quad x^3 + y^3 = b$$

Auflösung.

Aus (I.) ergiebt sich

$$x = a - y$$

Diesen Werth von x in (II.) substituirt, giebt

$$(a-y)^3 + y^3 = b$$

oder $a^3 - 3a^2y + 3ay^2 - y^3 + y^3 = b$

$$a^3 - 3a^2y + 3ay^2 = b$$

$$3ay^2 - 3a^2y = b - a^3$$

$$y^2 - ay = \frac{b-a^3}{3a}$$

und $y^2 - ay + \frac{a^2}{4} = \frac{a^2}{4} + \frac{b-a^3}{3a} = \frac{3a^3 + 4b - 4a^3}{12a}$.

$$= \frac{4b - a^3}{12a}$$

also $y - \frac{a}{2} = \pm\sqrt{\frac{4b-a^3}{12a}}$

folgl. $y = \frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{4b-a^3}{12a}}$

und $x = a - y = a - \frac{a}{2} \mp \sqrt{\frac{4b-a^3}{12a}}$

$$= \frac{a}{2} \mp \sqrt{\frac{4b-a^3}{12a}}$$

6. Gleichung.

I. $2x + 3y = 118$

II. $5x^2 - 7y^2 = 4333$

Auflösung.

Aus (I.) ergiebt sich

$$x = \frac{118-3y}{2} = 59 - \frac{3y}{2}$$

Substituirt man den Werth von x in (II.), so ist

$$5\left(59 - \frac{3y}{2}\right)^2 - 7y^2 = 4333$$

oder $17405 - 885y + \frac{45y^2}{4} - 7y^2 = 4333$

$$\frac{45y^2 - 28y^2 - 3540y}{4} = -13072$$

$$17y^2 - 3540y = -52288$$

$$y^2 - \frac{3540y}{17} = -\frac{52288}{17}$$

und $y^2 - \frac{3540y}{17} + \left(\frac{1770}{17}\right)^2 = \left(\frac{1770}{17}\right)^2 - \frac{52288}{17}$

$$= \frac{1770^2 - 52288 \cdot 17}{17^2} = \frac{2244004}{17^2}$$

also $y - \frac{1770}{17} = \pm \frac{1498}{17}$

folgl. $y = \frac{1770 + 1498}{17} = \frac{3268}{17} = 192\frac{4}{17}$

und $x = 59 - \frac{3y}{2} = 59 - \frac{3 \cdot 3268}{2 \cdot 17}$

$$= 59 - \frac{3 \cdot 1634}{17} = \frac{1003 - 4902}{17} = -\frac{3899}{17} = -229\frac{6}{17}$$

oder $y = \frac{1770 - 1498}{17} = \frac{272}{17} = 16$

und $x = 59 - \frac{3 \cdot 16}{2} = 59 - 24 = 35$

7. Gleichung.

I. $ax + by = h$

II. $cx^2 + dy^2 = k$

Auflösung.

Aus (I.) ergiebt sich

$$x = \frac{h - by}{a}$$

Substituirt man diesen Werth von x in (II.), so erhält man

$$c\left(\frac{h - by}{a}\right)^2 + dy^2 = k$$

oder $ch^2 - 2bchy + b^2cy^2 + a^2dy^2 = a^2k$

$$(a^2d + b^2c)y^2 - 2bchy = a^2k - ch^2$$

$$y^2 - \frac{2bch}{a^2d + b^2c}y = \frac{a^2k - ch^2}{a^2d + b^2c}$$

$$y^2 - \frac{2bch}{a^2d+b^2c}y + \left(\frac{bch}{a^2d+b^2c}\right)^2 = \left(\frac{bch}{a^2d+b^2c}\right)^2 + \frac{a^2k-ch^2}{a^2d+b^2c}$$

$$= \frac{a^2(a^2dk-cdh^2+b^2ck)}{(a^2d + b^2c)^2}$$

also $y - \frac{bch}{a^2d + b^2c} = \pm \frac{a\sqrt{(a^2dk - cdh^2 + b^2ck)}}{a^2d + b^2c}$

folgl. $y = \frac{bch \pm a\sqrt{(a^2dk - cdh^2 + b^2ck)}}{a^2d + b^2c}$

Auf eine ähnliche Art findet man

$$x = \frac{adh \mp b\sqrt{(a^2dk - cdh^2 + b^2ck)}}{a^2d + b^2c}$$

8. Gleichung.

I. $x^2 - y^2 = h$

II. $(x + y + a)^2 + (x - y + a)^2 = k$

Auflösung.

Man verwandle die Gleichung (II.) in

$$2x^2 + 2y^2 + 4ax + 2a^2 = k$$

oder $x^2 + y^2 + 2ax + a^2 = \frac{k}{2}$

Hierzu addire man (I.), so ergiebt sich

$$2x^2 + 2ax + a^2 = \frac{2h + k}{2}$$

oder $x^2 + ax = \frac{2h + k - 2a^2}{4}$

und $x^2 + ax + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \frac{2h+k-2a^2}{4} = \frac{2h+k-a^2}{4}$

$$x + \frac{a}{2} = \pm\sqrt{\frac{2h + k - a^2}{4}} = \frac{\pm\sqrt{(2h + k - a^2)}}{2}$$

folgl. $x = \frac{-a \pm \sqrt{(2h + k - a^2)}}{2}$

Ferner findet man aus (I.)

$$y^2 = x^2 - h$$

Substituirt man in dieser Gleichung den für x gefundenen Werth, so erhält man

$$y^2 = \frac{a^2 \mp 2a\sqrt{(2h + k - a^2)} + 2h + k - a^2 - 4h}{4}$$

$$= \frac{\mp 2a\sqrt{(2h + k - a^2)} + k - 2h}{4}$$

folgl. $y = \pm\sqrt{\frac{\frac{1}{2}k - h \mp a\sqrt{(2h + k - a^2)}}{2}}$

9. Gleichung.

I. $\frac{18x}{y} = \frac{8y}{x}$

II. $3xy + 2x + y = 485$

Auflösung.

Man verwandle die Gleichung (I.) in

$$18x^2 = 8y^2$$

oder $9x^2 = 4y^2$

und ziehe aus beiden Theilen dieser Gleichung die Quadratwurzel, so ist

$$3x = \pm 2y$$

oder III. $x = \pm \frac{2y}{3}$

Diesen Werth von x in (II.) substituirt, giebt

$$3 \cdot \frac{2y}{3} \cdot y + 2 \cdot \frac{2y}{3} + y = 485$$

oder $2y^2 + \frac{7y}{3} = 485$

$$y^2 + \frac{7y}{6} = \frac{485}{2}$$

und $y^2 + \frac{7y}{6} + \left(\frac{7}{12}\right)^2 = \left(\frac{7}{12}\right)^2 + \frac{485}{2} = \frac{34969}{12^2}$

also $y + \frac{7}{12} = \pm \frac{187}{12}$

folgl. $y = \frac{187 - 7}{12} = \frac{180}{12} = 15$

und $x = \frac{2y}{3} = \frac{2 \cdot 15}{3} = 10$

oder $y = \frac{-187 - 7}{12} = -\frac{194}{12} = -16\frac{1}{6}$

und $x = \frac{2y}{3} = \frac{2 \cdot - 16\frac{1}{6}}{3} = -\frac{194}{18} = -10\frac{7}{9}$ *)

*) Setzt man in (III.) $x = -\frac{2y}{3}$ statt $x = \frac{2y}{3}$, so er-

10. Gleichung.

$$\text{I.}\quad \frac{ax}{y} = \frac{by}{x}$$

$$\text{II.}\quad cxy + dx + ey = h$$

Auflösung.

Man verwandle die Gleichung (I.) in

$$ax^2 = by^2$$

$$\text{folgl. III.}\quad x = \pm\, y\sqrt{\frac{b}{a}}$$

Diesen Werth von x substituire man in (II.), so ist

$$cy^2\sqrt{\frac{b}{a}} + dy\sqrt{\frac{b}{a}} + ey = h$$

$$\text{oder}\quad y^2 + \frac{\left(d\sqrt{\frac{b}{a}} + e\right)y}{c\sqrt{\frac{b}{a}}} = \frac{h}{c\sqrt{\frac{b}{a}}}$$

$$y^2 + \frac{\left(d\sqrt{\frac{b}{a}} + c\right)y}{c\sqrt{\frac{b}{a}}} + \left\{\frac{d\sqrt{\frac{b}{a}} + e}{2c\sqrt{\frac{b}{a}}}\right\}^2 = \frac{h}{c\sqrt{\frac{b}{a}}} + \left\{\frac{d\sqrt{\frac{b}{a}} + e}{2c\sqrt{\frac{b}{a}}}\right\}^2$$

$$= \frac{\frac{d^2b}{a} + e^2 + 2dc\sqrt{\frac{b}{a}} + 4ch\sqrt{\frac{b}{a}}}{\frac{4c^2b}{a}}$$

Verwandelt man den Zähler dieses Bruchs in einen Bruch, dessen gemeinschaftlicher Nenner a ist, und

---

hält man noch folgende zwei Paar Gleichungen für x und y, nämlich

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{-34919}}{18};\quad y = \frac{-1 \mp \sqrt{-34919}}{12}$$

hebt dieses a gegen das im Nenner befindliche a, so erhält man

$$\frac{d^2b + ae^2 + 2de\sqrt{ab}\ ^{*)} + 4cb\sqrt{ab}}{4c^2b}$$

also

$$y + \frac{e\sqrt{a}+d\sqrt{b}}{2c\sqrt{b}}\ ^{**)} = \frac{\pm\sqrt{[(e\sqrt{a}+d\sqrt{b})^2\ ^{***)} + 4ch\sqrt{ab}]}}{2c\sqrt{b}}$$

folgl. $y = \frac{-(e\sqrt{a}+d\sqrt{b}) \pm \sqrt{[(e\sqrt{a}+d\sqrt{b})^2 + 4ch\sqrt{ab}]}}{2c\sqrt{b}}$

Substituirt man diesen Werth von y in (III.), so erhält man

$$x = \frac{-(e\sqrt{a}+d\sqrt{b}) \pm \sqrt{[(e\sqrt{a}+d\sqrt{b})^2 + 4ch\sqrt{ab}]}}{2c\sqrt{a}}\ ^{****)}$$

Nimmt man in (III.) $x = -y\sqrt{\frac{b}{a}}$ statt $x = y\sqrt{\frac{b}{a}}$, so

---

*) Denn $2de\sqrt{\frac{b}{a}} = 2de\sqrt{\frac{ab}{a^2}} = \frac{2de\sqrt{ab}}{a}$

**) Es ist $\frac{d\sqrt{\frac{b}{a}}+e}{2c\sqrt{\frac{b}{a}}} = \frac{\frac{d\sqrt{ab}+ae}{a}}{\frac{2c\sqrt{ab}}{a}} = \frac{d\sqrt{ab}+ae}{2c\sqrt{ab}}$

und multiplicirt man Zähler und Nenner mit $\sqrt{a}$, so ist

$$\frac{d\sqrt{ab}+ae}{2c\sqrt{ab}} = \frac{ad\sqrt{b}+ae\sqrt{a}}{2ac\sqrt{b}} = \frac{d\sqrt{b}+e\sqrt{a}}{2c\sqrt{b}}$$

***) Weil $(e\sqrt{a} + d\sqrt{b})^2 = ae^2 + bd^2 + 2de\sqrt{ab}$

****) $\frac{\sqrt{\frac{b}{a}}}{2c\sqrt{b}} = \frac{\frac{\sqrt{ab}}{a}}{2c\sqrt{b}}$, multiplicirt man Zähler und Nenner mit $a = \sqrt{a}\sqrt{a}$, so ist

$$\frac{\frac{\sqrt{ab}}{a}}{2c\sqrt{b}} = \frac{\frac{a\sqrt{ab}}{a}}{2c\sqrt{a}\sqrt{ab}} = \frac{\sqrt{ab}}{2c\sqrt{a}\sqrt{ab}} = \frac{1}{2c\sqrt{a}}$$

erhält man noch zwei Paar Gleichungen für x und y, nämlich:

$$x = \frac{-(e\sqrt{a} - d\sqrt{b}) \pm \sqrt{[(e\sqrt{a} - d\sqrt{b})^2 - 4ch\sqrt{ab}]}}{2c\sqrt{a}}$$

$$y = \frac{+(e\sqrt{a} - d\sqrt{b}) \mp \sqrt{[(e\sqrt{a} - d\sqrt{b})^2 - 4ch\sqrt{ab}]}}{2c\sqrt{b}}$$

11. Gleichung.

$$\text{I. } x + y + x^2 + y^2 = a$$
$$\text{II. } x - y + x^2 - y^2 = b$$

Auflösung.

Man addire beide Gleichungen, so ist

$$2x^2 + 2x = a + b$$

$$\text{oder } x^2 + x = \frac{a+b}{2}$$

$$\text{und } x^2 + x + \frac{1}{4} = \frac{1}{4} + \frac{a+b}{2} = \frac{1 + 2a + 2b}{4}$$

$$\text{also } x + \frac{1}{2} = \pm \frac{\sqrt{(2a + 2b + 1)}}{2}$$

$$\text{folgl. } x = \frac{-1 \pm \sqrt{(2a + 2b + 1)}}{2}$$

Ziehet man (II.) von (I.) ab, so erhält man auf eine ähnliche Art

$$y = \frac{-1 \pm \sqrt{(2a - 2b + 1)}}{2}$$

12. Gleichung.

$$\text{I. } x + y = xy$$
$$\text{II. } x + y + x^2 + y^2 = a$$

Auflösung.

Man setze $x + y = xy = t$, so ist aus (II.)

$$t + x^2 + y^2 = a$$

Man muß nun versuchen, ob sich nicht auch $x^2 + y^2$ durch t ausdrücken lasse. Nun ist aber $t^2 = x^2 + 2xy + y^2 = x^2 + y^2 + 2t$. Es ist daher

$$x^2 + y^2 = t^2 - 2t$$

und also $t + t^2 - 2t = a$

oder $t^2 - t = a$

und $t^2 - t + \frac{1}{4} = \frac{1}{4} + a = \frac{1 + 4a}{4}$

also $t - \frac{1}{2} = \pm \frac{\sqrt{(1 + 4a)}}{2}$

folgl. $t = \frac{1 \pm \sqrt{(1 + 4a)}}{2} = x + y = xy$

Man hat also hier für t, nämlich sowohl für das Produkt als für die Summe von x und y, einen Werth in bekannten Größen ausgedrückt gefunden. Nun sind in der Auflösung zur zweiten Aufgabe dieses Abschnittes für die Werthe zweier Größen, deren Summe und Produkt gegeben sind, folgende Ausdrücke

$$x = \frac{a \pm \sqrt{(a^2 - 4b)}}{2} \text{ und } y = \frac{a \mp \sqrt{(a^2 - 4b)}}{2}$$

gefunden worden. Man braucht also nur in diesen Formeln den für t gefundenen Werth $\frac{1 \pm \sqrt{(1 + 4a)}}{2}$ statt a und b zu substituiren.

Es ist demnach

$$x = \frac{\frac{1 \pm \sqrt{(1+4a)}}{2} \pm \sqrt{\left[\left(\frac{1 \pm \sqrt{(1+4a)}}{2}\right)^2 - \frac{4 \pm 4\sqrt{(1+4a)}}{2}\right]}}{2}$$

$$= \frac{1 \pm \sqrt{(1+4a)} \pm \sqrt{[1+1+4a \pm 2\sqrt{(1+4a)} - 8 \mp 8\sqrt{(1+4a)}]}}{4}$$

$$= \frac{1 \pm \sqrt{(1+4a)} \pm \sqrt{[4a - 6 \mp 6\sqrt{(1+4a)}]}}{4}$$

und $y = \frac{1 \pm \sqrt{(1+4a)} \mp \sqrt{[4a - 6 \mp 6\sqrt{(1+4a)}]}}{4}$

13. Gleichung.

I. $ax - by = g$

II. $a^3x^3 - b^3y^3 = hxy$

Auflösung.

Aus (I.) ergiebt sich

$$x = \frac{g + by}{a}$$

Diesen Werth für x in (II.) substituirt, giebt

$$(g + by)^3 - b^3y^3 = \frac{ghy + bhy^2}{a}$$

oder $ag^3 + 3abg^2y + 3ab^2gy^2 + ab^3y^3 - ab^3y^3$

$$= ghy + bhy^2$$

$$(3ab^2g - bh)\, y^2 + (3abg^2 - gh)\, y = -ag^3$$

also $y^2 + \frac{3abg^2 - gh}{3ab^2g - bh}\, y = \frac{-ag^3}{3ab^2g - bh}$

$$y^2 + \frac{(3abg - h)\,g}{(3abg - h)\,b}\, y = \frac{-ag^3}{3ab^2g - bh}$$

$$y^2 + \frac{gy}{b} = \frac{-ag^3}{3ab^2g - bh}$$

$$\text{und } y^2 + \frac{gy}{b} + \frac{g^2}{4b^2} = \frac{g^2}{4b^2} - \frac{ag^3}{(3abg - h)\,b}$$

$$= \frac{3abg^3 - g^2h - 4abg^3}{4b^2\,(3abg - h)} = \frac{-g^2h - abg^3}{4b^2\,(3abg - h)}$$

$$= \frac{g^2\,(h + abg)}{4b^2\,(h - 3abg)}$$

Ziehet man die Quadratwurzel aus beiden Theilen, so ist

$$y + \frac{g}{2b} = \pm\sqrt{\frac{g^2}{4b^2} \cdot \frac{h + abg}{h - 3abg}} = \pm\frac{g}{2b}\sqrt{\frac{h + abg}{h - 3abg}}$$

$$\text{folgl. } y = -\frac{g}{2b} \pm \frac{g}{2b}\sqrt{\frac{h + abg}{h - 3abg}}$$

$$= \frac{g}{2b}\left(-1 \pm \sqrt{\frac{h + abg}{h - 3abg}}\right)$$

$$\text{und } x = \frac{g + by}{a} = \frac{g}{a} + \frac{b}{a} \cdot \frac{g}{2b}\left(-1 \pm \sqrt{\frac{h + abg}{h - 3abg}}\right)$$

$$= \frac{2g}{2a} - \frac{g}{2a} \pm \frac{g}{2a}\sqrt{\frac{h + abg}{h - 3abg}} = \frac{g}{2a} \pm \frac{g}{2a}\sqrt{\frac{h + abg}{h - 3abg}}$$

$$= \frac{g}{2a}\left(1 \pm \sqrt{\frac{h + abg}{h - 3abg}}\right)$$

14. Gleichung.

$$\text{I.} \quad (x - y)\,(x^2 - y^2) = a$$

$$\text{II.} \quad (x + y)\,(x^2 + y^2) = b$$

Auflösung.

Man verwandle zuvörderst die Gleichung (I.) in

$$\text{III.} \quad (x - y)^2(x + y) = a \text{ *)}$$

---

*) Denn es ist

$$(x - y)\,(x^2 - y^2) = (x - y)\,(x - y)\,(x + y)$$
$$= (x - y)^2\,(x + y)$$

und setze $x + y = t$, $xy = z$, so ist

$$x^2 + 2xy + y^2 = t^2$$

oder $x^2 + 2z + y^2 = t^2$

folgl. $x^2 + y^2 = t^2 - 2z$

Subtrahirt man von beiden Theilen dieser Gleichung $2xy = 2z$, so bleibt

$$x^2 - 2xy + y^2 = t^2 - 2z - 2z = t^2 - 4z$$

folgl. $(x - y)^2 = t^2 - 4z$

Substituirt man nun den Werth von $(x - y)^2$ in (III.), und den von $x^2 + y^2$ in (II.), so ist

$$\text{IV.} \quad (t^2 - 4z)\, t = a$$

$$\text{V.} \quad (t^2 - 2z)\, t = b$$

Hier hat man also zwei Gleichungen, woraus sich die unbekannten Größen t und z auf folgende Art bestimmen lassen. Man subtrahire (IV.) von (V.), so bleibt

$$2tz = b - a$$

folgl. $t = \frac{b - a}{2z}$

Man substituire diesen Werth für t in (V.), so ist

$$\left[\frac{(b-a)^2}{4z^2} - 2z\right]\frac{b-a}{2z} = b$$

oder $\frac{(b-a)^3}{8z^3} - (b - a) = b$

$$\frac{(b-a)^3}{8z^3} = 2b - a$$

$$8z^3 = \frac{(b-a)^3}{2b-a}$$

Man ziehe aus beiden Theilen die Kubikwurzel, so ist

$$2z = \frac{b-a}{\sqrt[3]{(2b-a)}}$$

$$\text{folgl. } z = \frac{b-a}{2\sqrt[3]{(2b-a)}}$$

Mithin $t = \frac{b-a}{2z} = b-a : \frac{b-a}{\sqrt[3]{(2b-a)}}$

$$= \frac{(b-a)\sqrt[3]{(2b-a)}}{b-a} = \sqrt[3]{(2b-a)}$$

Da man nun den Werth für die Summe und das Produkt von x und y gefunden hat, so substituire man, wie in der zwölften Gleichung, in die Formeln

$$x = \frac{a \pm \sqrt{(a^2-4b)}}{2} \text{ und } y = \frac{a \mp \sqrt{(a^2-4b)}}{2}$$

den Ausdruck $\sqrt[3]{(2b-a)}$ statt a und $\frac{b-a}{2\sqrt[3]{(2b-a)}}$ statt b, so erhält man

$$x = \frac{\sqrt[3]{(2b-a)} \pm \sqrt{\left[\sqrt[3]{(2b-a)^2} - \frac{2(b-a)}{\sqrt[3]{2b-a)}}\right]}}{2}$$

$$= \frac{\sqrt[3]{(2b-a)} \pm \sqrt{\left[\frac{\sqrt[3]{(2b-a)^3} - 2b + 2a}{\sqrt[3]{(2b-a)}}\right]}}{2}$$

$$= \frac{\sqrt[3]{(2b-a)} \pm \sqrt{\frac{a}{\sqrt[3]{(2b-a)}}}}{2} = \frac{\sqrt[3]{(2b-a)} \pm \frac{\sqrt{a}}{\sqrt[6]{(2b-a)}}}{2} \text{ *)}$$

$$= \frac{(2b-a)^{\frac{1}{3}}\,(2b-a)^{\frac{1}{6}} \pm \sqrt{a}}{2\sqrt[6]{(2b-a)}} = \frac{(2b-a)^{\frac{1}{2}} \pm \sqrt{a}}{2\sqrt[6]{(2b-a)}}$$

$$= \frac{\sqrt{(2b-a)} \pm \sqrt{a}}{2\sqrt[6]{(2b-a)}}$$

Auf eine ähnliche Art findet man

$$y = \frac{\sqrt{(2b-a)} \mp \sqrt{a}}{2\sqrt[6]{(2b-a)}}$$

15. Gleichung.

I. $x^2 + y^2 + z^2 = a$

II. $y^2 = 2xz + b$

III. $cx = dz$

Auflösung.

Man verwandle (III.) in

IV. $cx - dz = 0$

Ferner substituire man in (I.) statt y^2 den ihm gleichen Werth $2xz + b$ aus (II.), so ist

$$x^2 + 2xz + z^2 = a - b$$

oder V. $x + z = \sqrt{(a-b)}$

Diese Gleichung multiplicire man mit c, so erhält man

$$cx + cz = c\sqrt{(a-b)}$$

*) Denn es ist

$$\sqrt{\frac{a}{\sqrt[3]{(2b-a)}}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{\sqrt[3]{(2b-a)}}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt[6]{(2b-a)}}$$

hiervon (III.) abgezogen, bleibt

$$(c + d)\, z = c \sqrt{(a - b)}$$

$$\text{folgl. } z = \frac{c \sqrt{(a - b)}}{c + d}$$

Multiplicirt man (V.) mit d und addirt (IV.) hinzu, so erhält man

$$x = \frac{d \sqrt{(a - b)}}{c + d}$$

Substituirt man endlich die Werthe von x und z in (II.), so ist

$$y^2 = \frac{2cd\,(a - b)}{c^2 + 2cd + d^2} + b$$

$$= \frac{2acd - 2bcd + 2bcd + b\,(c^2 + d^2)}{c^2 + 2cd + d^2}$$

$$\text{folgl. } y = \sqrt{\frac{2acd + b(c^2 + d^2)}{c^2 + 2cd + d^2}} = \frac{\sqrt{[2acd + b(c^2 + d^2)]}}{c + d}$$

16. Gleichung.

$$x\,(y + z) = a$$
$$y\,(x + z) = b$$
$$z\,(x + y) = c$$

Auflösung.

Man verwandle zuvörderst die gegebenen Gleichungen in

$$\text{I.} \quad xy + xz = a$$
$$\text{II.} \quad xy + yz = b$$
$$\text{III.} \quad xz + yz = c$$

Man subtrahire (II.) von (I.), so bleibt

$$\text{IV.} \quad xz - yz = a - b$$

(IV.) zu (III.) addirt, giebt

$$xz = \frac{a - b + c}{2}$$

(IV.) von (III.) subtrahirt, giebt

$$yz = \frac{c - a + b}{2}$$

Subtrahirt man (III.) von (II.), so ist

$$xy - xz = b - c$$

Diese Gleichung zu (I.) addirt, giebt

$$xy = \frac{a + b - c}{2}$$

Setzt man nun zur Abkürzung $a - b + c = A$, $c - a + b = B$, $a + b - c = C$, so ist

$$\text{V.} \quad xz = \frac{A}{2}$$

$$\text{VI.} \quad yz = \frac{B}{2}$$

$$\text{VII.} \quad xy = \frac{C}{2}$$

Man multiplicire diese drei Gleichungen mit einander, so erhält man

$$x^2y^2z^2 = \frac{ABC}{8}$$

oder $\text{VIII.} \quad xyz = \pm \sqrt{\frac{ABC}{8}}$

Dividirt man (VIII.) durch (V.), so findet man unmittelbar

$$y = \frac{\pm\sqrt{\frac{ABC}{8}}}{\frac{A}{2}} = \pm\sqrt{\frac{\frac{ABC}{8}}{\frac{A^2}{4}}} = \pm\sqrt{\frac{BC}{2A}}$$

$$= \pm\sqrt{\frac{(c-a+b)\,(a+b-c)}{2\,(a-b+c)}}$$

Dividirt man (VIII.) durch (VI.), so ist

$$x = \frac{\pm\sqrt{\frac{ABC}{8}}}{\frac{B}{2}} = \pm\sqrt{\frac{\frac{ABC}{8}}{\frac{B^2}{4}}} = \pm\sqrt{\frac{AC}{2B}}$$

$$= \pm\sqrt{\frac{(a-b+c)\,(a+b-c)}{2\,(c-a+b)}}$$

Dividirt man endlich (VIII.) durch (VII.), so ist

$$z = \frac{\pm\sqrt{\frac{ABC}{8}}}{\frac{C}{2}} = \pm\sqrt{\frac{\frac{ABC}{8}}{\frac{C^2}{4}}} = \pm\sqrt{\frac{AB}{2C}}$$

$$= \pm\sqrt{\frac{(a-b+c)\,(c-a+b)}{2\,(a+b-c)}}$$

17. Gleichung.

$$\frac{xyz}{x+y} = a$$

$$\frac{xyz}{y+z} = b$$

$$\frac{xyz}{x+z} = c$$

Auflösung.

Man verwandle diese Gleichungen in

$$\frac{x+y}{xyz} = \frac{1}{a} \text{ *)}$$
$$\frac{y+z}{xyz} = \frac{1}{b}$$
$$\frac{x+z}{xyz} = \frac{1}{c}$$

oder in

$$\text{I. } \frac{1}{yz} + \frac{1}{xz} = \frac{1}{a}$$
$$\text{II. } \frac{1}{xz} + \frac{1}{xy} = \frac{1}{b}$$
$$\text{III. } \frac{1}{yz} + \frac{1}{xy} = \frac{1}{c}$$

Man subtrahire (II.) von (I.), so bleibt

$$\text{IV. } \frac{1}{yz} - \frac{1}{xy} = \frac{1}{a} - \frac{1}{b}$$

(IV.) zu (III.) addirt, giebt

$$\frac{2}{yz} = \frac{1}{a} - \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{bc - ac + ab}{abc}$$
$$\text{oder } yz = \frac{2abc}{bc - ac + ab}$$

(IV.) von (III.) subtrahirt, giebt

$$\frac{2}{xy} = \frac{1}{c} - \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{ab - bc + ac}{abc}$$
$$\text{oder } xy = \frac{2abc}{ab - bc + ac}$$

Subtrahirt man (III.) von (II.), so ist

$$\frac{1}{xz} - \frac{1}{yz} = \frac{1}{b} - \frac{1}{c}$$

---

*) Siehe Anmerk. zur 38. Gleichung des II. Abschnitts.

Diese Gleichung zu (I.) addirt, giebt

$$\frac{2}{xz} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} - \frac{1}{c} = \frac{bc + ac - ab}{abc}$$

$$\text{oder } xz = \frac{2abc}{bc + ac - ab}$$

Setzt man wieder zur Abkürzung $bc - ac + ab = A$, $ab - bc + ac = B$, $bc + ac - ab = C$, so ist

$$\text{V.} \quad yz = \frac{2abc}{A}$$

$$\text{VI.} \quad xy = \frac{2abc}{B}$$

$$\text{VII.} \quad xz = \frac{2abc}{C}$$

Man multiplicire diese drei Gleichungen mit einander, so erhält man

$$x^2y^2z^2 = \frac{8\,(abc)^3}{ABC}$$

$$\text{oder VIII. } xyz = \pm\sqrt{\frac{8\,(abc)^3}{ABC}}$$

Dividirt man (VIII.) durch (V.), so erhält man unmittelbar

$$x = \frac{\pm\sqrt{\frac{8\,(abc)^3}{ABC}}}{\frac{2abc}{A}} = \pm\sqrt{\frac{\frac{8(abc)^3}{ABC}}{\frac{4(abc)^2}{A^2}}} = \pm\sqrt{\frac{8(abc)^3A^2}{4(abc)^2ABC}}$$

$$= \pm\sqrt{\frac{2abcA}{BC}} = \pm\sqrt{\frac{2abc\,(bc - ac + ab)}{(ab - bc + ac)\,(bc + ac - ab)}}$$

Auf eine ähnliche Art erhält man, wenn man (VIII.) successive durch (VII.) und (VI.) dividirt,

$$y = \pm \sqrt{\frac{2abc\,(bc + ac - ab)}{(ab + ac - bc)\,(ab - ac + bc)}}$$

$$z = \pm \sqrt{\frac{2abc\,(ab + ac - bc)}{(ab - ac + bc)\,(bc + ac - ab)}}$$

18. Gleichung.

I. $xy = p$

II. $(b - y)\,z = p'$

III. $(a - x)\,(c - z) = p''$

Auflösung.

Aus (I.) erhält man

$$x = \frac{p}{y}$$

und aus (II.)

$$z = \frac{p'}{b - y}$$

Setzt man diese gefundenen Werthe von x und z in (III.), nachdem man diese Gleichung wie gewöhnlich geordnet, so ergiebt sich

$$\frac{cp}{y} + \frac{ap'}{b-y} - \frac{pp'}{y\,(b-y)} = ac - p''$$

oder $cp\,(b - y) + ap'y - pp' = (ac - p'')\,y\,(b - y)$

$(p'' - ac)\,y^2 + (abc - bp'' + cp - ap')\,y = pp' - bcp$

Setzt man nun $abc - bp'' + cp - ap' = A$, so ist

$$y^2 + \frac{A}{p'' - ac}\,y = \frac{bcp - pp'}{p'' - ac}$$

folgl. $y = \dfrac{-A \pm \sqrt{[A^2 - 4p\,(p' - bc)\,(p'' - ac)]}}{2(p'' - ac)}$

Setzt man ferner $-abc + bp'' - cp + ap' = B$, so findet man

$$x = \frac{-A \mp \sqrt{[A^2 - 4p(p' - bc)(p'' - ac)]}}{2(p' - bc)}$$

$$z = \frac{-B \pm \sqrt{[B^2 - 4p(p' - bc)(p'' - ac)]}}{2(p - ab)}$$

Die in der Beispielsammlung enthaltene 19te und 20ste Gleichung bieten bei der Auflösung keine Schwierigkeiten dar, und sind daher hier zur Ersparung des Raumes weggelassen worden.

V.

Auflösung der Gleichungen von höhern Graden.

A. Durch die Cardanische Formel.

1. Gleichung.

$$x^3 - 3x - 2 = 0$$

Auflösung.

Jede kubische Gleichung, welche durch die Cardanische Formel aufgelöst werden soll, muß zuvörderst auf die Form $x^3 = Px + Q$ gebracht werden. Es ist demnach hier

$$x^3 = 3x + 2$$

Da nun hier $P = 3$, $Q = 2$, so findet man, wenn in der Cardanischen Formel statt P und Q, 3 und 2 substituirt wird,

$$x = \sqrt[3]{\frac{2 + \sqrt{\left(2^2 - \frac{4 \cdot 3^3}{27}\right)}}{2}} + \sqrt[3]{\frac{2 - \sqrt{\left(2^2 - \frac{4 \cdot 3^3}{27}\right)}}{2}}$$

$$= \sqrt[3]{1} + \sqrt[3]{1} = 2$$

2. Gleichung.

$$x^3 + 12x + 63 = 0$$

Auflösung.

Hier ist

$$x^3 = -12x - 63$$

folgl. $P = -12,\ Q = -63$

$$\text{also } x = \sqrt[3]{\frac{-63 + \sqrt{\left[(-63)^2 - \frac{4\cdot(-12)^3}{27}\right]}}{2}}$$

$$+ \sqrt[3]{\frac{-63 - \sqrt{\left[(-63)^2 - \frac{4\cdot(-12)^3}{27}\right]}}{2}}$$

$$= \sqrt[3]{\frac{-63+65}{2}} + \sqrt[3]{\frac{-63-65}{2}}$$

$$= \sqrt[3]{1} + \sqrt[3]{-64} = 1 - 4 = -3$$

3. Gleichung.

$$x^3 - 21x + 344 = 0$$

Auflösung.

Hier ist

$$x^3 = 21x - 344$$

folgl. ist $P = 21,\ Q = -344$

$$\text{und also } x = \sqrt[3]{\frac{-344 + \sqrt{\left[(-344)^2 - \frac{4\cdot 21^3}{27}\right]}}{2}}$$

$$+ \sqrt[3]{\frac{-344 - \sqrt{\left[(-344)^2 - \frac{4\cdot 21^3}{27}\right]}}{2}}$$

$$= \sqrt[3]{\frac{-344+342}{2}} + \sqrt[3]{\frac{-344-342}{2}}$$

$$= \sqrt[3]{-1} + \sqrt[3]{-343} = -1 + (-7) = -8$$

4. Gleichung.

$$x^3 - 6x - 40 = 0$$

Auflösung.

Es ist

$$x^3 = 6x + 40$$

folgl. $P = 6,\ Q = 40$

$$\text{und also } x = \sqrt[3]{\frac{40 + \sqrt{\left(40^2 - \frac{4 \cdot 6^3}{27}\right)}}{2}}$$

$$+ \sqrt[3]{\frac{40 - \sqrt{\left(40^2 - \frac{4 \cdot 6^3}{27}\right)}}{2}}$$

$$= \sqrt[3]{\left(\frac{40}{2} + \sqrt{\frac{1568}{4}}\right)} + \sqrt[3]{\left(\frac{40}{2} - \sqrt{\frac{1568}{4}}\right)}$$

$$= \sqrt[3]{(20 + \sqrt{392})} + \sqrt[3]{(20 - \sqrt{392})}$$

$$= \sqrt[3]{(2+\sqrt{2})^3} + \sqrt[3]{(2-\sqrt{2})^3}\ {}^{*)} = 2+\sqrt{2}+2-\sqrt{2} = 4$$

---

*) Von der Richtigkeit dieser Verwandlung überzeugt man sich, sobald man $2 + \sqrt{2}$ wirklich zum Cubus erhebt; denn man erhält alsdann

$$2^3 + 3 \cdot 2^2 \sqrt{2} + 3 \cdot 2 (\sqrt{2})^2 + (\sqrt{2})^3$$
$$= 8 + 12\sqrt{2} + 12 + 2\sqrt{2} = 20 + 14\sqrt{2}$$
$$= 20 + \sqrt{2 \cdot 14^2} = 20 + \sqrt{392}$$

und auf eine ähnliche Art findet man

$$(2 - \sqrt{2})^3 = 20 - \sqrt{392}$$

Obgleich man nun keine Regel hat, wonach man die Kubikwurzel aus einem Ausdruck wie $20 + \sqrt{392}$ ziehen könnte, so dienen diese und die folgenden Beispiele doch dazu, um anzuzeigen, daß es Fälle giebt, wo man durch die Cardanische Formel zu einem

5. Gleichung.

$$x^3 + 3x - 14 = 0$$

Auflösung.

Es ist

$$x^3 = -3x + 14$$

$$\text{folgl. } P = -3,\ Q = 14$$

$$\text{und also } x = \sqrt[3]{\frac{14 + \sqrt{\left[14^2 - \frac{4\cdot(-3)^3}{27}\right]}}{2}}$$

$$+ \sqrt[3]{\frac{14 - \sqrt{\left[14^2 - \frac{4\cdot(-3)^3}{27}\right]}}{2}}$$

$$= \sqrt[3]{\left(\frac{14}{2} + \sqrt{\frac{14^2+4}{4}}\right)} + \sqrt[3]{\left(\frac{14}{2} - \sqrt{\frac{14^2+4}{4}}\right)}$$

$$= \sqrt[3]{(7+\sqrt{50})} + \sqrt[3]{(7-\sqrt{50})} = \sqrt[3]{(1+\sqrt{2})^3} + \sqrt[3]{(1-\sqrt{2})^3}$$

$$= 1 + \sqrt{2} + 1 - \sqrt{2} = 2$$

6. Gleichung.

$$x^3 - \tfrac{15}{2}x + 290\tfrac{1}{2} = 0$$

Auflösung.

Hier ist

$$x^3 = \frac{15x}{2} - 290\tfrac{1}{2}$$

$$\text{folgl. ist } P = \frac{15}{2},\ Q = -290\tfrac{1}{2}$$

---

irrationalen, oder gar imaginären Ausdruck gelangt, und die Gleichung dennoch eine reelle und rationale Wurzel hat.

und also $x = \sqrt[3]{\frac{-290\frac{1}{2} + \sqrt{\left[(-290\frac{1}{2})^2 - \frac{4\cdot(\frac{15}{2})^3}{27}\right]}}{2}}$

$$+ \sqrt[3]{\frac{-290\frac{1}{2} - \sqrt{\left[(-290\frac{1}{2})^2 - \frac{4\cdot(\frac{15}{2})^3}{27}\right]}}{2}}$$

$$= \sqrt[3]{\frac{-\frac{581}{2} + \sqrt{\left(\frac{337561}{4} - \frac{125}{2}\right)}}{2}}$$

$$+ \sqrt[3]{\frac{-\frac{581}{2} - \sqrt{\left(\frac{337561}{4} - \frac{125}{2}\right)}}{2}}$$

$$= \sqrt[3]{\frac{-581 + \sqrt{337311}}{4}} + \sqrt[3]{\frac{-581 - \sqrt{337311}}{4}}$$

$$= \sqrt[3]{\left(\frac{-7 + \sqrt{39}}{2}\right)^3} + \sqrt[3]{\left(\frac{-7 - \sqrt{39}}{2}\right)^3}$$

$$= \frac{-7 + \sqrt{39} - 7 - \sqrt{39}}{2} = \frac{-14}{2} = -7$$

7. Gleichung.

$$x^3 - 12x^2 + 57x - 94 = 0$$

Auflösung.

Hier muß zuvörderst das zweite Glied weggeschafft werden. Um dieses aber zu bewerkstelligen, setze man $y \pm p$ für x, und in der dadurch erhaltenen Gleichung, welche, in Hinsicht auf y, immer von dem Grade seyn wird, als die gegebene, suche man p so zu bestimmen, daß das zweite Glied wegfällt. Nun sind im Allgemeinen die beiden ersten

Glieder einer Gleichung $x^n + ax^{n-1}$; setzt man also $x = y - p$, so ist

$$x^n = (y - p)^n = y^n - npy^{n-1} \ldots.$$

$$\text{und } ax^{n-1} = a\,(y - p)^{n-1} = ay^{n-1} \ldots.$$

Sollen sich daher die beiden Glieder npy^{n-1} und ay^{n-1} durch die Addition gegen einander aufheben, so muß $np = a$ oder $p = \frac{a}{n}$ seyn. D. h. man muß setzen $x = y - \frac{a}{n}$. In diesem Falle wird man eine andere Gleichung vom nten Grade erhalten, in welcher das zweite Glied nicht vorkommt. Um z. B. also aus einer kubischen Gleichung $x^3 + ax^2 +$ ꝛc. $= 0$ das zweite Glied wegzuschaffen, setze man $x = y - \frac{a}{3}$, wodurch man eine Gleichung vom dritten Grade erhält, in welcher das zweite Glied fehlt, und wo man also durch die Cardanische Formel die unbekannte Größe y und folglich auch $x = y - \frac{a}{3}$ finden kann.

Im gegenwärtigen Beispiele setze man daher $x = y + \frac{12}{3}$, das ist $x = y + 4$. Substituirt man diesen Werth für x in die gegebene Gleichung, so ist

$$\begin{array}{rcl} x^3 & = & (y+4)^3 = y^3 + 12y^2 + 48y + 64 \\ -12x^2 & = & -12\,(y+4)^2 = \quad -12y^2 - 96y - 192 \\ +57x & = & +57\,(y+4) = \quad +57y + 228 \\ -94 & = & \quad -94 \\ \hline & & y^3 + 9y + 6 = 0 \end{array}$$

In dieser Gleichung fehlt das zweite Glied, und man kann setzen

$$y^3 = -9y - 6$$

folgl. ist $P = -9$, $Q = -6$

Es ist also

$$y = \sqrt[3]{\frac{-6 + \sqrt{\left[(-6)^2 - \frac{4 \cdot (-9)^3}{27}\right]}}{2}}$$

$$+ \sqrt[3]{\frac{-6 - \sqrt{\left[(-6)^2 - \frac{4 \cdot (-9)^3}{27}\right]}}{2}}$$

$$= \sqrt[3]{\frac{-6 + \sqrt{(36 + 108)}}{2}} + \sqrt[3]{\frac{-6 - \sqrt{(36 + 108)}}{2}}$$

$$= \sqrt[3]{\frac{-6 + 12}{2}} + \sqrt[3]{\frac{-6 - 12}{2}} = \sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{-9}$$

$$= \sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{9}$$

folgl. $x = y + 4 = 4 + \sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{9} = 3{,}36216\ldots$

Die folgenden vier Gleichungen werden auf dieselbe Art wie die vorhergehende aufgelöst, weshalb sie zur Ersparung des Raumes weggelassen sind.

B. Durch Aufsuchung ihrer rationalen Wurzeln.

1. Gleichung.

$$x^3 - 9x^2 + 26x - 24 = 0$$

Auflösung.

Gleichungen, worin x in einer höhern Potenz als in der zweiten vorkommt, werden höhere Gleichungen

genannt. Sie erhalten ihre besondern Benennungen von der höchsten Potenz, worauf x erhoben ist; so hat man z B. Gleichungen vom dritten, vierten, fünften Grade ꝛc., je nachdem der höchste Exponent von x 3, 4, 5 ꝛc. ist. Man nennt eine jede Gleichung geordnet, wenn alle Exponenten von x in ihrer natürlichen Ordnung bis auf 0 auf einander folgen und keiner derselben fehlt. Die Gleichung heißt annullirt, wenn alle Glieder auf eine Seite gebracht sind, und sich also auf der andern Seite 0 befindet. Es läßt sich daher eine jede geordnete, vollständige, annullirte Gleichung im Allgemeinen folgendergestalt darstellen:

$$x^n + ax^{n-1} + bx^{n-2} + cx^{n-3} \cdots + px + q = 0$$

oder auch (wenn nämlich, der Kürze wegen, X einen allgemeinen Ausdruck bezeichnet, der alle Potenzen von x, von der höchsten bis zur niedrigsten, enthält)

$$X = 0$$

Ein jeder Werth von x, der so beschaffen ist, daß er an die Stelle von x gesetzt der Gleichung Genüge leistet, wird eine Wurzel der Gleichung genannt. Es sey w eine solche Wurzel, oder $x = w$, so muß X durch $x - w$ theilbar seyn. Denn wollte man annehmen, daß man bei der Division, außer dem Quotienten Q, auch noch den Rest R erhalte, so kann in diesem weiter kein x enthalten seyn, weil nämlich die Division noch nicht vollendet wäre, wenn sich noch im Dividendo x befände. Multiplicirt man also den Divisor $x - w$ mit dem erhaltenen Quotienten Q, und

addirt den Rest R hinzu, so muß man das Dividendum X erhalten. Es ist also

$$X = (x - w) Q + R$$

Da nun nach der Voraussetzung, wenn man $x = w$ setzt, der erste Theil dieser Gleichung, nämlich X verschwindet, so muß auch, bei dem nämlichen Werthe des x, der zweite Theil $(x - w) Q + R$ verschwinden. Ist aber $x = w$, oder $x - w = 0$, so ist auch $(x - w) Q = 0$, mithin auch $R = 0$; d. h. es kann bei der Division durch $x - w$ kein Rest übrig bleiben. Es ist also bloß

$$X = (x - w) Q$$

Es ist einleuchtend, daß Q ein Ausdruck von der nämlichen Form als X, aber vom Grade $n - 1$ ist; dieser Ausdruck mag nun X' heißen. Setzt man

$$X' = 0$$

so hat man eine Gleichung von der vorigen Form, welche um einen Grad niedriger ist. Die Wurzel dieser Gleichung sey w' oder $x = w'$, so ist aus obigen Gründen $x - w'$ ein Faktor der Gleichung, und erhält man bei der Division durch $x - w'$ den Quotienten Q', so ist

$$X' = (x - w') Q'$$

hieraus folgt also, daß

$$X = (x - w) Q = (x - w) (x - w') Q'$$

Nun ist ferner Q' ebenfalls ein solcher Ausdruck wie X, nur vom Grade $n - 2$. Dieser Ausdruck mag X'' seyn, so daß $Q' = X''$.

Setzt man nun

$$X'' = 0,$$

und nimmt man an, daß $x = w''$ eine Wurzel dieser Gleichung sey, so findet man wie vorher

$$X'' = (x - w'')\ Q''$$

und hieraus

$$X = (x - w)\ (x - w')\ (x - w'')\ Q''$$

Diese Operation wird so oft wiederholt, als der Exponent n Einheiten enthält, und man erhält am Ende für den Quotienten Q einen nämlichen Ausdruck wie X, wo das x nur im ersten Grade vorkommt. Dieser letzte Quotient hat also auch die Form von $x - w$, und man kann daher behaupten, daß der Ausdruck X aus n Faktoren von der Form $x - w$ zusammengesetzt sey. Es geschiehet aber der Gleichung $X = 0$ ein Genüge, sobald einer dieser Faktoren $= 0$ wird, das ist, wenn man $x = w$, oder $x = w'$ ꝛc. setzt, und da dieses hier auf n verschiedene Arten geschehen kann, so hat die Gleichung n verschiedene Wurzeln. Es ist daher der allgemeine Satz erwiesen, daß eine jede Gleichung so viele Wurzeln habe, als der Grad der Gleichung beträgt.

Multiplicirt man nun mehrere Faktoren von der Form $x - w$, $x - w'$, $x - w''$ u. s. w., so wird man immer ein Resultat erhalten, worin das letzte Glied ein Produkt der Wurzeln w, w', w'' ꝛc. ist; folglich müssen auch in jeder geordneten und annullirten Gleichung die Werthe von x im letzten bekannten Gliede

als Faktoren enthalten seyn. Dieses giebt ein bequemes Mittel an die Hand, durch Zerfällung des letzten Gliedes in seine Faktoren die sämmtlichen Werthe von x zu finden.

Die hier gegebene Gleichung muß drei Wurzeln haben, welche in dem letzten bekannten Gliede 24 aufgehen. Da nun die Zahlen 2, 3, 4, Faktoren von 24 sind, und für x gesetzt die Gleichung zu 0 machen, so ist $x = 2$, oder $= 3$, oder $= 4$.

2. Gleichung.

$$x^3 - 8x^2 + 5x + 14 = 0$$

Auflösung.

Die Faktoren von 14 sind ± 1, ± 2, ± 7, ± 14. Nun ist es eine allgemeine Regel, daß die Gleichung immer so viele positive Wurzeln hat, als Abwechselungen der Zeichen (+) und (—) vorkommen*). In der gegebenen Gleichung wechseln die Zeichen zweimal ab, folglich hat sie zwei positive und eine negative Wurzel. Untersucht man daher, welche von den genannten Faktoren der Gleichung Genüge thun, so findet man

$$x = -1, \text{ oder } 2, \text{ oder } 7.$$

3. Gleichung.

$$x^3 - 49x - 120 = 0$$

*) Der Beweis derselben gehört in die Theorie der Gleichungen. Ich habe sie hier angenommen, weil sie in sehr vielen Lehrbüchern, jedoch ohne Beweis, vorkommt.

Auflösung.

Hier wechseln die Zeichen einmal ab; die Gleichung hat also nur einen positiven und zwei negative Werthe. Verfährt man nun wie vorher, und fängt mit den kleinsten Faktoren von 120 an, so findet man bald, daß

$$x = -3, -5, 8$$

4. Gleichung.

$$x^3 - 18x^2 + 87x - 110 = 0$$

Auflösung.

In dieser Gleichung wechseln die Zeichen dreimal; die Wurzeln sind daher alle drei positiv, und man findet auf die vorhergehende Art

$$x = 2, 5, 11$$

5. Gleichung.

$$x^4 - 10x^3 + 35x^2 - 50x + 24 = 0$$

Auflösung.

Diese Gleichung ist vom vierten Grade, und hat daher vier Wurzeln; und da ferner die Zeichen viermal abwechseln, so sind die Wurzeln alle positiv. Untersucht man endlich, welche Faktoren von 24 der Gleichung Genüge thun, so findet man

$$x = 1, 2, 3, 4$$

6. Gleichung.

$$x^4 - 45x^2 - 40x + 84 = 0$$

Auflösung.

Hier wechseln die Zeichen zweimal ab; es giebt also zwei negative und zwei positive Wurzeln. Man findet nach obiger Art

$$x = 1, -2, -6, 7$$

7. Gleichung.

$$x^4 + 29x^3 + 287x^2 + 1147x + 1560 = 0$$

Auflösung.

Hier wechseln die Zeichen gar nicht ab; daher sind alle vier Wurzeln negativ, und man findet

$$x = -3, -5, -8, -13$$

8. Gleichung.

$$x^3 + \frac{17}{4}x^2 - \frac{79}{8}x + \frac{15}{4} = 0$$

Auflösung.

Um die Wurzeln dieser Gleichung zu finden, muß man zuvörderst die Brüche wegschaffen. Die Brüche aber werden nur dann weggeschafft, wenn die ganze Gleichung mit einer Zahl multiplicirt wird, worin sämmtliche Nenner aufgehen. Zugleich aber darf hier durch die Multiplication das erste Glied oder die höchste Potenz von x keinen Coefficienten erhalten. Da nun dieses letztere nur alsdann möglich ist, wenn x ein Bruch ist, so gebe man der Größe x die Form eines Bruches, so daß $x = \frac{y}{n}$. Ist nun z. B. die

Gleichung $x^3 \pm \frac{a}{b}x^2 \pm \frac{c}{d}x \pm \frac{e}{f} = 0$ gegeben, und setzt man statt x den dafür angenommenen Werth $\frac{y}{n}$, so erhält man

$$\frac{y^3}{n^3} \pm \frac{ay^2}{bn^2} \pm \frac{cy}{dn} \pm \frac{e}{f} = 0$$

oder wenn mit n^3 multiplicirt wird,

$$y^3 \pm \frac{an}{b}y^2 \pm \frac{cn^2}{d}y \pm \frac{en^3}{f} = 0$$

Hat man daher für n eine Zahl angenommen, in deren ersten Potenz b, in der zweiten d und in der dritten f aufgehet, so ist diese Gleichung von den Brüchen befreit, und es lassen sich alsdann die Wurzeln von y, und folglich auch die von $x = \frac{y}{n}$, bestimmen. Aus allem dem geht hervor, daß man nur nöthig hat, eine Zahl n aufzusuchen, welche die eben erwähnte Eigenschaft in Hinsicht sämmtlicher Nenner besitzt, und alsdann die einzelnen Glieder der gegebenen Gleichung mit den einzelnen Gliedern der Reihe 1, n, n^2, n^3 ... nämlich x^3 mit 1, $\frac{ax^2}{b}$ mit n, $\frac{cx}{d}$ mit n^2, $\frac{e}{f}$ mit n^3 zu multipliciren, und endlich die auf die gewöhnliche Art gefundenen Wurzeln durch n zu dividiren. Demzufolge setze man im gegenwärtigen Beispiele $n = 4$, und multiplicire die einzelnen Glieder der Gleichung, nach der angezeigten Art, mit 1, 4, 16 und 64, so erhält man

$$1 \cdot x^3 + 4 \cdot \tfrac{17}{4}x^2 - 16 \cdot \tfrac{79}{8}x + 64 \cdot \tfrac{15}{4}$$
$$= x^3 + 17x^2 - 158x + 240 = 0$$

Die Wurzeln dieser Gleichung sind 2, 5, — 24. Dividirt man diese Wurzeln durch 4, so erhält man

$$x = \frac{1}{2},\ \frac{5}{4},\quad 6$$

9. Gleichung.

$$x^3 - \frac{13x^2}{12} + \frac{3x}{8} - \frac{1}{24} = 0$$

Auflösung.

Man setze $n = 12$ und multiplicire die einzelnen Glieder der Gleichung mit 1, 12, 144 und 1728, so erhält man

$$x^3 - 13x^2 + 54x - 72 = 0$$

Die Wurzeln dieser Gleichung sind 3, 4, 6. Diese durch 12 dividirt, geben

$$x = \frac{1}{4},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{2}$$

10. Gleichung.

$$x^3 - \frac{14x^2}{3} + 7x - \frac{10}{3} = 0$$

Auflösung.

Man setze $n = 3$ und multiplicire die einzelnen Glieder der Gleichung mit 1, 3, 9 und 27, so erhält man

$$x^3 - 14x^2 + 63x - 90 = 0$$

Die Wurzeln dieser Gleichung sind 3, 5, 6. Diese durch 3 dividirt, geben

$$x = 1,\ \frac{5}{3},\ 2$$

11. Gleichung.

$$x^3 + \frac{8x^2}{5} + \frac{9x}{100} - \frac{9}{100} = 0$$

Auflösung.

Hier muß $n = 10$ gesetzt, und die einzelnen Glieder der Gleichung mit 1, 10, 100 und 1000 multiplicirt werden. Hierdurch erhält man

$$x^3 + 16x^2 + 9x - 90 = 0$$

Die Wurzeln dieser Gleichung sind $2, -3, -15$. Diese durch 10 dividirt, geben

$$x = \tfrac{1}{5}, -\tfrac{3}{10}, -\tfrac{3}{2}$$

12. Gleichung.

$$x^3 - \frac{39x^2}{28} + \frac{31x}{56} - \frac{3}{56} = 0$$

Auflösung.

Man setze $n = 28$ und multiplicire die einzelnen Glieder der Gleichung mit 1, 28, 28^2 und 28^3, so erhält man

$$x^3 - 39x^2 + 9x - 1176 = 0$$

Die Wurzeln dieser Gleichung sind 4, 14, 21. Diese durch 28 dividirt, geben

$$x = \tfrac{1}{7}, \tfrac{1}{2}, \tfrac{3}{4}$$

13. Gleichung.

$$x^3 - \frac{139x^2}{24} + \frac{329x}{48} + \frac{55}{16} = 0$$

Auflösung.

Man setze $n = 24$ und multiplicire die einzelnen

Glieder der Gleichung mit 24, 24^2 und 24^3, so erhält man

$$x^3 - 139x^2 + 3948x + 47520 = 0$$

Die Wurzeln dieser Gleichung sind − 9, 60, 88. Dividirt man diese durch 24, so ist

$$x = -\tfrac{3}{8},\ \tfrac{5}{2},\ \tfrac{11}{3}$$

14. Gleichung.

$$x^3 + \frac{82x^2}{15} - \frac{173x}{5} - \frac{126}{5} = 0$$

Auflösung.

Man setze n = 15 und multiplicire die einzelnen Glieder der Gleichung mit 1, 15, 15^2 und 15^3, so erhält man

$$x^3 + 82x^2 - 7785x - 85050 = 0$$

Die Wurzeln dieser Gleichung sind − 10, 63, − 135. Diese durch 15 dividirt, geben

$$x = -\tfrac{2}{3},\ \tfrac{21}{5},\ -9$$

15. Gleichung.

$$x^4 - \frac{19x^3}{4} + \frac{49x^2}{8} - \frac{11x}{4} + \frac{3}{8} = 0$$

Auflösung.

Man setze n = 4 und multiplicire die einzelnen Glieder der Gleichung mit 1, 4, 4^2, 4^3, 4^4, so erhält man

$$x^4 - 19x^3 + 98x^2 - 176x + 96 = 0$$

Diese Gleichung hat vier Wurzeln, nämlich 2, 1, 4, 12. Diese durch 4 dividirt, geben

$$x = \tfrac{1}{2},\ \tfrac{1}{4},\ 1,\ 3$$

16. Gleichung.

$$x^4 - \frac{41x^3}{8} + \frac{287x^2}{32} - \frac{393x}{64} + \frac{45}{32} = 0$$

Auflösung.

Man setze $n = 8$ und multiplicire die einzelnen Glieder der Gleichung mit $1, 8, 8^2, 8^3, 8^4$, so erhält man

$$x^4 - 41x^3 + 574x^2 - 3144x + 5760 = 0$$

Von dieser Gleichung sind die Wurzeln 4, 6, 15, 16. Diese durch 8 dividirt, geben

$$x = \tfrac{1}{2}, \tfrac{3}{4}, \tfrac{15}{8}, 2$$

17. Gleichung.

$$x^3 - 14x^2 - 5x + 70 = 0$$

Auflösung.

Es ist bereits oben angeführt worden, daß der erste Theil einer jeden annullirten Gleichung so angesehen werden kann, als wäre er aus der Multiplication einer gewissen Anzahl Faktoren von der Form $x - w$ entstanden. Hat man also bei einer Gleichung vom dritten Grade eine Wurzel w gefunden, und dividirt die Gleichung durch $x - w$, so erhält man zum Quotienten eine quadratische Gleichung, aus welcher sich, durch die Auflösung derselben, die andern beiden Wurzeln leicht finden lassen.

Im gegenwärtigen Beispiele findet man, vermittelst der Faktoren des bekannten Gliedes 70, die Wurzel 14. Da nun aber die kubische Gleichung drei Wurzeln haben muß, so gebe man der Gleichung $x = 14$ die

Form einer annullirten Gleichung, nämlich $x - 14 = 0$, und dividire mit $x - 14$ in $x^3 - 14x^2 - 5x + 70$, so erhält man $x^2 - 5$. Es ist also $x^2 - 5 = 0$ oder $x = \pm \sqrt{5}$. Die drei gesuchten Werthe sind also $14, +\sqrt{5}, -\sqrt{5}$.

18. Gleichung.

$$x^3 - 13x^2 + 49x - 45 = 0$$

Auflösung.

Aus dem bekannten Gliede $- 45$ erhält man nur die rationale Wurzel 5, also $x = 5$ und $x - 5 = 0$. Dividirt man daher mit $x - 5$ in $x^3 - 13x^2 + 49x - 45$, so erhält man $x^2 - 8x + 9$, also $x^2 - 8x = - 9$. Folglich $x = 4 \pm \sqrt{7}$. Die drei gesuchten Wurzeln sind also $5, 4 + \sqrt{7}, 4 - \sqrt{7}$.

19. Gleichung.

$$x^3 - 13x^2 + 38x + 16 = 0$$

Auflösung.

Aus dem bekannten Gliede 16 erhält man nur die rationale Wurzel 8 oder $x = 8$ und $x - 8 = 0$. Dividirt man daher mit $x - 8$ in $x^3 - 13x^2 + 38x + 16$, so erhält man $x^2 - 5x - 2 = 0$, oder $x^2 - 5x = 2$. Folglich ist $x = \frac{5}{2} \pm \sqrt{(\frac{25}{4} + 2)} = \frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{33}{4}} = \frac{5}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{33}$. Die drei Werthe sind also $8, \frac{5}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{33}, \frac{5}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{33}$.

20. Gleichung.

$$x^3 - 6x^2 + 19x - 44 = 0$$

Auflösung.

Aus dem bekannten Gliede $- 44$ erhält man nur

die rationale Wurzel 4 oder $x = 4$ und $x - 4 = 0$. Dividirt man daher mit $x - 4$ in $x^3 - 6x^2 + 19x - 44$, so erhält man $x^2 - 2x + 11$, also $x^2 - 2x + 11 = 0$, oder $x^2 - 2x = -11$. Folglich $x = 1 \pm \sqrt{(1 - 11)} = 1 \pm \sqrt{-10}$. Die drei Werthe sind also 4, $1 + \sqrt{-10}$, $1 - \sqrt{-10}$.

21. Gleichung.

$$x^3 + \frac{7x^2}{6} + \frac{13x}{2} + \frac{21}{2} = 0$$

Auflösung.

Man setze $n = 6$ und multiplicire die einzelnen Glieder der Gleichung mit 1, 6, 6^2, 6^3, so erhält man $x^3 + 7x^2 + 234x + 2268 = 0$. Aus dem bekannten Gliede dieser Gleichung findet man nur die rationale Wurzel -9 oder $x = -9$, also $x + 9 = 0$. Dividirt man daher $x + 9$ in $x^3 + 7x^2 + 234x + 2268$, so erhält man $x^2 - 2x + 252$, also $x^2 - 2x + 252 = 0$, $x^2 - 2x = -252$, und folglich $x = 1 \pm \sqrt{(1 - 252)} = 1 \pm \sqrt{-251}$. Die drei Wurzeln der Gleichung $x^3 + 7x^2 + 234x + 2268 = 0$ sind daher -9, $1 + \sqrt{-251}$, $1 - \sqrt{-251}$. Dividirt man diese durch 6, so erhält man die gesuchten Wurzeln $-\frac{3}{2}$, $\frac{1}{6} + \frac{1}{6}\sqrt{-251}$, $\frac{1}{6} - \frac{1}{6}\sqrt{-251}$.

22. Gleichung.

$$x^4 + x^3 - 24x^2 + 43x - 21 = 0$$

Auflösung.

Aus dem bekannten Gliede 21 erhält man zuvörderst die Wurzel 1 oder $x = 1$ und $x - 1 = 0$. Dividirt man daher mit $x - 1$ in $x^4 + x^3 - 24x^2 + 43x - 21$, so erhält man die kubische Gleichung $x^3 + 2x^2 - 22x + 21 = 0$. Nun findet man aus dem Gliede $+21$ die Wurzel 3 oder $x = 3$ und $x - 3 = 0$. Man dividire daher ferner mit $x - 3$ in $x^3 + 2x^2 - 22x + 21$, so erhält man die quadratische Gleichung $x^2 + 5x - 7 = 0$, oder $x^2 + 5x = 7$. Folglich ist

$$x = -\tfrac{5}{2} \pm \sqrt{\tfrac{53}{4}} = -\tfrac{5}{2} \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{53}$$

Die vier gesuchten Werthe sind daher

$$1,\ 3,\ -\tfrac{5}{2} + \tfrac{1}{2}\sqrt{53},\ -\tfrac{5}{2} - \tfrac{1}{2}\sqrt{53}.$$

23. Gleichung.

$$x^5 - 3x^4 - 8x^3 + 24x^2 - 9x + 27 = 0$$

Auflösung.

Aus dem bekannten Gliede $+ 27$ erhält man zuvörderst die Wurzel 3 oder $x = 3$ und $x - 3 = 0$. Dividirt man daher mit $x - 3$ in $x^5 - 3x^4 - 8x^3 + 24x^2 - 9x + 27$, so erhält man die biquadratische Gleichung $x^4 - 8x^2 - 9 = 0$. Nun findet man aus dem Gliede $- 9$ die Wurzel 3; man dividire daher ferner mit $x - 3$ in $x^4 - 8x^2 - 9$, so erhält man die kubische Gleichung $x^3 + 3x^2 + x + 3 = 0$. Hiervon ist, wie aus dem bekannten Gliede $+ 3$ erhellet, $- 3$ eine Wurzel oder $x = - 3$ und $x + 3 = 0$. Man dividire daher endlich mit $x + 3$ in $x^3 + 3x^2 + x + 3$, so erhält

man die quadratische Gleichung $x^2 + 1 = 0$ und folglich $x = \pm \sqrt{-1}$. Die fünf verlangten Wurzeln sind daher $3, 3, -3, -\sqrt{-1}, +\sqrt{-1}$.

24. Gleichung.

$$x^5 - \tfrac{3}{2}x^4 - 6x^3 + 9x^2 - 13x + 19\tfrac{1}{2} = 0$$

Auflösung.

Man setze $n = 2$ und multiplicire die einzelnen Glieder der Gleichung mit $1, 2, 2^2, 2^3, 2^4, 2^5$, so erhält man

$$x^5 - 3x^4 - 24x^3 + 72x^2 - 208x + 624 = 0$$

Aus dem bekannten Gliede 624 findet man auf die gewöhnliche Art die Wurzel 3. Dividirt man nun mit $x - 3$ in

$$x^5 - 3x^4 - 24x^3 + 72x^2 - 208x + 624 = 0$$

so erhält man die biquadratische Gleichung

$$x^4 - 24x^2 - 208 = 0$$

Die Methode, die rationalen Theiler des letzten Gliedes zu versuchen, läßt sich hier nicht anbringen, weil keiner derselben zu dieser Gleichung paßt. Da sie aber von der Form $x^{2n} + ax^n = b$ ist, so läßt sie sich wie eine quadratische Gleichung auflösen, und man erhält

$$x^2 = 12 \pm \sqrt{(144 + 208)} = 12 \pm \sqrt{16 \cdot 22}$$
$$= 4(3 \pm \sqrt{22})$$

und $x = \pm \sqrt{4(3 \pm \sqrt{22})} = \pm 2\sqrt{(3 \pm \sqrt{22})}$

Die fünf Wurzeln der Gleichung

$$x^5 - 3x^4 - 24x^3 + 72x^2 - 208x + 624 = 0$$

sind daher

$$3,\ +2\sqrt{(3+\sqrt{22})},\ -2\sqrt{(3+\sqrt{22})},$$
$$+2\sqrt{(3-\sqrt{22})},\ -2\sqrt{(3-\sqrt{22})}.$$

Dividirt man nun diese Wurzeln durch 2, so erhält man die gesuchten Wurzeln

$$\tfrac{3}{2},\ +\sqrt{(3+\sqrt{22})},\ -\sqrt{(3+\sqrt{22})},$$
$$+\sqrt{(3-\sqrt{22})},\ -\sqrt{(3-\sqrt{22})}.$$

C. Durch Näherung.

Bevor die folgenden Gleichungen aufgelöst werden, soll hier die allgemein bekannte Näherungsmethode vorausgeschickt werden. Eine Gleichung, deren Wurzeln irrational sind, durch Näherung aufzulösen, heißt so viel: man soll den Werth der darin enthaltenen unbekannten Größe x so nahe, daß der Fehler für nichts zu achten ist, bestimmen. Dieses geschiehet nun auf folgende Art. Zuvörderst wird untersucht, zwischen welchen ganzen Zahlen die Wurzel fällt. Man nimmt nämlich für x nach und nach mehrere bestimmte, positive Werthe an, setzt sie in die aufzulösende Gleichung, und siehet, welche Werthe ein positives, und welche ein negatives Resultat geben. Diejenigen beiden zunächst auseinander folgenden Zahlen, wovon die eine das Resultat positiv, und die andere negativ giebt, sind die Grenzen, zwischen welchen die positive Wurzel liegt. Die Grenzen der negativen Wurzeln findet

man, indem man auf eine gleiche Art für x negative Werthe annimmt. Wenn man sich nun mit diesen gefundenen Grenzen nicht begnügen, sondern den Werth für x noch näher haben will, so setze man ferner, wenn im Allgemeinen die gefundenen Grenzen w und $w + 1$ sind, $x = w + p$, wo man unter p einen Bruch verstehet. Es sey nun zuerst $x^2 = a$ die gegebene aufzulösende Gleichung, so ist $x^2 = (w + p)^2 = w^2 + 2wp + p^2 = a$. Da es hier aber nur auf Näherung ankömmt, so kann man p^2, als sehr klein (indem jede Potenz eines Bruches kleiner als der Bruch selbst ist), weglassen. Es ist also $x^2 = w^2 + 2wp = a$, oder $p = \frac{a-w^2}{2w}$. Folglich ist $x = w + \frac{a-w^2}{2w} = \frac{w^2 + a}{2w}$. Diese Formel zeigt, wie man aus jedem gefundenen Werthe einen andern Werth, der der Größe x näher kömmt, finden kann. So z. B. ist für $x^2 = 2$ der nächste Werth in ganzen Zahlen $= 1$, also $w = 1$, und $\frac{1^2 + 2}{2 \cdot 1} = \frac{3}{2}$ ein näherer Werth. Aus dem Werthe $\frac{3}{2}$ findet man einen noch nähern, wenn man wieder setzt $\frac{(\frac{3}{2})^2 + 2}{2 \cdot \frac{3}{2}} = \frac{17}{12}$. Ein abermals näherer Werth ist $\frac{(\frac{17}{12})^2 + 2}{2 \cdot \frac{17}{12}} = \frac{577}{408}$ u. s. w.

Auf eine gleiche Art schließt man bei der kubischen Gleichung $x^3 = a$. Man setze nämlich $x = w + p$, so ist $x^3 = w^3 + 3w^2p + 3wp^2 + p^3$. Läßt man

aus den vorigen Gründen $3wp^2 + p^3$ weg, so ist $x^3 = w^3 + 3w^2p = a$, und $p = \frac{a - w^3}{2w^2}$, folgl.

$$x = w + \frac{a - w^3}{3w^2} = \frac{2w^3 + a}{3w^2}$$

Es sey ferner die vollständige kubische Gleichung $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ gegeben, von welcher w die nächste Grenze sey, so setze man ebenfalls $x = w + p$, folgl. $x^3 = w^3 + 3w^2p$ 2c. und $x^2 = w^2 + 2wp$ 2c. Substituirt man diese Werthe für x in die gegebene Gleichung, so erhält man

$$w^3 + 3w^2p + aw^2 + 2awp + bw + bp + c = 0$$

oder $p\,(-3w^2 - 2aw - b) = w^3 + aw^2 + bw + c$

und $p = \frac{w^3 + aw^2 + bw + c}{-3w^2 - 2aw - b}$

Folgl. $x = w + \frac{w^3 + aw^2 + bw + c}{-3w^2 - 2aw - b} = \frac{-2w^3 - aw^2 + c}{-3w^2 - 2aw - b}$

oder multiplicirt man Zähler und Nenner mit -1, so erhält man $x = \frac{2w^3 + aw^2 - c}{3w^2 + 2aw + b}$

Auf eben die Art verfährt man bei einer Gleichung vom vierten Grade. Es sey z. B. $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, und w, die nächste Grenze einer ihrer Wurzeln bekannt; so setze man wieder $x = w + p$; $x^2 = w^2 + 2wp$ 2c.; $x^3 = w^3 + 3w^2p$ 2c.; $x^4 = w^4 + 4w^3p$ 2c. Substituirt man diese Werthe in die gegebene Gleichung, so erhält man

$$w^4 + 4w^3p + aw^3 + 3aw^2p + bw^2 + 2bwp + cw + cp + d = 0$$

oder $p\,(-4w^3 - 3aw^2 - 2bw - c)$
$$= w^4 + aw^3 + bw^2 + cw + d$$
und $p = \dfrac{w^4 + aw^3 + bw^2 + cw + d}{-4w^3 - 3aw^2 - 2bw - c}$

folgl. $x = w + p = w + \dfrac{w^4 + aw^3 + bw^2 + cw + d}{-4w^3 - 3aw^2 - 2bw - c}$
$$= \frac{-3w^4 - 2aw^3 - bw^2 + d}{-4w^3 - 3aw^2 - 2bw - c}$$

Multiplicirt man Zähler und Nenner mit -1, so erhält man
$$x = \frac{3w^4 + 2aw^3 + bw^2 - d}{4w^3 + 3aw^2 + 2bw + c}$$

Nun sey ganz im Allgemeinen die Gleichung
$$x^m + ax^{m-1} + bx^{m-2} + cx^{m-3} \ldots\ldots + hx^2 + kx + l = 0$$
gegeben, und die nächste Grenze einer ihrer Wurzeln $= w$, so setze man $x = w + p$ so ist
$$x^m = w^m + mw^{m-1}p$$
$$x^{m-1} = w^{m-1} + (m-1)\,w^{m-2}p$$
$$x^{m-2} = w^{m-2} + (m-2)\,w^{m-3}p$$
$$x^{m-3} = w^{m-3} + (m-3)\,w^{m-4}p$$
$$\vdots \qquad \vdots$$
$$x^2 = w^2 + 2wp$$

Substituirt man diese Werthe in die gegebene allgemeine Gleichung, so erhält man
$$w^m + mw^{m-1}p + aw^{m-1} + (m-1)aw^{m-2}p + bw^{m-2} + (m-2)\,bw^{m-3}p + cw^{m-3} + (m-3)\,cw^{m-4}p \ldots\ldots + hw^2 + 2hwp + kw + kp + l = 0$$

oder $p\,[mw^{m-1} + (m-1)\,aw^{m-2} + (m-2)\,bw^{m-3} + (m-3)\,cw^{m-4} \ldots + 2hw + k]$
$= -w^m - aw^{m-1} - bw^{m-2} - cw^{m-3} \ldots - hw^2 - kw - l$

und $$p = \frac{\left\{\begin{matrix} -w^m - aw^{m-1} - bw^{m-2} - cw^{m-3} \\ \ldots - hw^2 + kw - l \end{matrix}\right\}}{\left\{\begin{matrix} mw^{m-1} + (m-1)aw^{m-2} + (m-2)bw^{m-3} \\ + (m-3)\,cw^{m-4} \ldots + 2hw + k \end{matrix}\right\}}$$

folglich

$$x = w + p = w + \frac{\left\{\begin{matrix} -w^m - aw^{m-1} - bw^{m-2} - cw^{m-3} \\ \ldots - hw^2 - kw - l \end{matrix}\right\}}{\left\{\begin{matrix} mw^{m-1} + (m-1)aw^{m-2} + (m-2)bw^{m-3} \\ + (m-3)\,cw^{m-4} \ldots + 2hw + k \end{matrix}\right\}}$$

$$= \frac{\left\{\begin{matrix} (m-1)\,w^m + (m-2)\,aw^{m-1} + (m-3)\,bw^{m-2} \\ \ldots + hw^2 - l \end{matrix}\right\}}{\left\{\begin{matrix} mw^{m-1} + (m-1)\,aw^{m-2} + (m-2)\,bw^{m-3} \\ \ldots + 2hw + k \end{matrix}\right\}}$$

Aus dieser allgemeinen Formel findet man sehr leicht die für eine Gleichung von irgend einem bestimmten Grade. So ist z. B. bei der Gleichung vom fünften Grade $x^5 + ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$

$$x = \frac{\left\{\begin{matrix} (5-1)\,w^5 + (5-2)\,aw^{5-1} + (5-3)\,bw^{5-2} \\ + (5-4)\,cw^{5-3} - e \end{matrix}\right\}}{\left\{\begin{matrix} 5w^{5-1} + (5-1)\,aw^{5-2} + (5-2)\,bw^{5-3} \\ + (5-3)\,cw^{5-4} + d \end{matrix}\right\}}$$

$$= \frac{4w^5 + 3aw^4 + 2bw^3 + cw^2 - e}{5w^4 + 4aw^3 + 3bw^2 + 2cw + d}$$

Nunmehr lassen sich folgende Gleichungen sehr leicht auflösen.

1. Gleichung.

$$x^3 = 2$$

Auflösung.

Es ist $x^3 - 2 = 0$. Bei dieser Gleichung fällt die irrationale Wurzel zwischen 1 und 2; denn 1 statt x gesetzt, giebt zum Resultat -1, und 2 giebt $+6$. Man kann daher, wenn keine größere Schärfe verlangt wird, $x = 1$ setzen.

Im Falle aber, daß x genauer angegeben werden sollte, so erwäge man, daß die Näherungsformel für die kubische Gleichung $x = \frac{2w^3 + aw^2 - c}{3w^2 + 2aw + b}$ ist. Da also hier $w = 1$, $a = 0$, $b = 0$ und $c = -2$, so ist $x = \frac{2 \cdot 1^3 - (-2)}{3 \cdot 1^2} = \frac{2 + 2}{3} = \frac{4}{3}$

Substituirt man ferner $\frac{4}{3}$ für w, so erhält man

$$x = \frac{2 \cdot (\frac{4}{3})^3 - (-2)}{3 \cdot (\frac{4}{3})^2} = \frac{91}{72}$$

Diesen Werth aufs neue substituirt, giebt

$$x = \frac{2 \cdot (\frac{91}{72})^3 - (-2)}{3 \cdot (\frac{91}{72})^2} = \frac{2253638}{1788696} \text{ ꝛc.}$$

2. Gleichung.

$$x^3 = 30$$

Auflösung.

Es ist $x^3 - 30 = 0$. Hier fällt die irrationale Wurzel zwischen 3 und 4; denn 3 statt x gesetzt, giebt

zum Resultat — 3, und 4 an die Stelle von x gesetzt, giebt + 34. Man kann daher vorerst setzen x = 3.

Will man x näher kommen, so setze man in der Näherungsformel für die kubischen Gleichungen w = 3, a = 0, b = 0, c = — 30. Dieses giebt

$$x = \frac{2 \cdot 3^3 - (-30)}{3 \cdot 3^2} = \frac{28}{9}$$

Substituirt man statt w diesen gefundenen Werth für x, so erhält man

$$x = \frac{2 \cdot \left(\frac{28}{9}\right)^3 - (-30)}{3\left(\frac{28}{9}\right)^2} = \frac{65774}{21168} \text{ ꝛc.}$$

3. Gleichung.

$$x^3 - 12x^2 + 57x - 94 = 0$$

Auflösung.

Die irrationale Wurzel dieser Gleichung fällt zwischen 3 und 4; denn 3 statt x gesetzt, giebt zum Resultat — 4, und 4 an die Stelle von x gesetzt, giebt + 6. Es ist daher vorerst x = 3.

Nähere Werthe findet man, wenn man in der Näherungsformel für kubische Gleichungen w = 3, a = — 12, b = 57, c = — 94 setzt. Es ist alsdann

$$x = \frac{2 \cdot 3^3 - 12 \cdot 3^2 - (-94)}{3 \cdot 3^2 - 2 \cdot 12 \cdot 3 + 57} = \frac{10}{3}$$

Substituirt man statt w in der erwähnten Formel den gefundenen Werth $\frac{10}{3}$, so ist

$$x = \frac{2 \cdot \left(\frac{10}{3}\right)^3 - 12 \cdot \left(\frac{10}{3}\right)^2 - (-94)}{3 \cdot \left(\frac{10}{3}\right)^2 - 2 \cdot 12 \cdot \frac{10}{3} + 57} = \frac{938}{279} \text{ ꝛc.}$$

4. Gleichung.

$$x^3 - 15x^2 - 72x - 109 = 0$$

Auflösung.

Eine Wurzel dieser Gleichung fällt zwischen 5 und 6; denn setzt man 5 statt x, so ist das Resultat + 1, und setzt man 6 statt x, so ist es − 1. Man hat also schon vorläufig $x = 5$.

Verlangt man einen nähern Werth für x, so substituire man in der Näherungsformel für die kubische Gleichung $w = 5$, $a = -15$, $b = 72$, $c = -109$. Hierdurch erhält man

$$x = \frac{2 \cdot 5^3 - 15 \cdot 5^2 - (-109)}{3 \cdot 5^2 - 2 \cdot 15 \cdot 5 + 72} = \frac{16}{3}$$

Substituirt man ferner statt w den gefundenen Werth $\frac{16}{3}$, so ist

$$x = \frac{2 \cdot \left(\frac{16}{3}\right)^3 - 15 \cdot \left(\frac{16}{3}\right)^2 - (-109)}{3 \cdot \left(\frac{16}{3}\right)^2 - 2 \cdot 15 \cdot \frac{16}{3} + 72} = \frac{385}{72} \text{ ꝛc.}$$

Auf eine ähnliche Art findet man die Auflösungen zur fünften, sechsten und siebenten Aufgabe, welche Auflösungen hier zur Ersparung des Raumes weggeblieben sind.

8. Gleichung.

$$x^4 - 4x^3 + 18 = 0$$

Auflösung.

Eine Wurzel dieser Gleichung fällt zwischen 2 und 3. Denn substituirt man 2 statt x, so erhält man zum Resultat + 2, setzt man aber 3 statt x, so erhält man − 9. Man hat daher einen ziemlich nahen Werth von x, wenn man setzt x = 2.

Um nähere Werthe für x zu erhalten, so bediene man sich der Näherungsformel für die Gleichungen vom vierten Grade, nämlich

$$x = \frac{3w^4 + 2aw^3 + bw^2 - d}{4w^3 + 3aw^2 + 2bw + c}$$

und zwar indem man setzt $w = 2$, $a = -4$, $b = 0$, $c = 0$, $d = 18$, wodurch man erhält

$$x = \frac{3 \cdot 2^4 - 2 \cdot 4 \cdot 2^3 - 18}{4 \cdot 2^3 - 3 \cdot 4 \cdot 2^2} = \frac{17}{8}$$

Substituirt man ferner den gefundenen Werth $\frac{17}{8}$ statt w, so ist

$$x = \frac{3 \cdot \left(\frac{17}{8}\right)^4 - 2 \cdot 4 \cdot \left(\frac{17}{8}\right)^3 - 18}{4\left(\frac{17}{8}\right)^3 - 3 \cdot 4\left(\frac{17}{8}\right)^2} = \frac{137597}{64736} \text{ ꝛc.}$$

9. Gleichung.

$$x^4 + 8x^2 + 16x - 440 = 0$$

Auflösung.

Eine Wurzel dieser Gleichung fällt zwischen 4

und 5; denn 4 statt x gesetzt, giebt zum Resultat -52, und 5 statt x gesetzt, giebt $+465$. Es ist daher 4 ein naher Werth von x, und man kann setzen $x = 4$.

Einen nähern Werth für x findet man, wenn man in der Näherungsformel für die Gleichung vom vierten Grade statt w, a, b, c, d, die gehörigen Werthe setzt, nämlich $w = 4$, $a = 0$, $b = 8$, $c = 16$, $d = -440$, woraus sich ergiebt

$$x = \frac{3 \cdot 4^4 + 8 \cdot 4^2 - (-440)}{4 \cdot 4^3 + 2 \cdot 8 \cdot 4 + 16} = \frac{167}{42}$$

Substituirt man ferner $\frac{167}{42}$ statt w, so ist

$$x = \frac{3\left(\frac{167}{42}\right)^4 + 8 \cdot \left(\frac{167}{42}\right)^2 + 440}{4 \cdot \left(\frac{167}{42}\right)^3 + 2 \cdot 8 \cdot \frac{167}{42} + 16} = \frac{4096104771}{1030204056} \text{ ꝛc.}$$

Von den Aufgaben.

(Zu Meier Hirsch's Sammlung von Beispielen, 6ter Aufl. XV. Kapitel, S. 162 flg.)

VI.

Auflösungen der Aufgaben für die Gleichungen des ersten Grades mit einer unbekannten Größe.

1.

Das Vermögen des A sey x
so ist das von B = 2x
Es ist also $2x + x = 38700$
folgl. $x = 12900$ Vermögen des A
und 25800 Vermögen des B

2.

Wenn der eine x rthlr. erhält,
so erhält der andere 4x rthlr.
Es ist also $x + 4x = 2500$
folglich $x = 500$ für A
und 2000 für B

3.

Er habe x rthlr. Courant
und also $4\frac{1}{2}x$ rthlr. Münze

Es ist daher $x + 4\frac{1}{2}x = 2640$
folgl. $x = 480$ rthlr. Courant
mithin beträgt die Münze $4\frac{1}{2} \cdot 480 = 2160$ rthlr.

4.

Wenn der eine Theil $= x$
so ist der andere $= 1\frac{1}{4}x$
Es ist also $x + 1\frac{1}{4}x = 237$
folgl. $x = 105\frac{1}{3}$
und der andere Theil ist $1\frac{1}{4} \cdot 105\frac{1}{3} = 131\frac{2}{3}$

5.

Wenn die eine Zahl $= x$
so ist die andere $= mx$
Es ist also $x + mx = a$
folglich $x = \frac{a}{m+1}$
und die andere Zahl $= \frac{ma}{m+1}$

6.

Wenn der Antheil des $A = x$
so ist der von $B = \frac{7x}{2}$
Es ist also $x + \frac{7x}{2} = 1200$
folgl. $x = 266\frac{2}{3}$ rthlr. für A
und mithin der Antheil des $B = \frac{7 \cdot 266\frac{2}{3}}{2} = 933\frac{1}{3}$ rthlr.

7.

Der eine Theil sey $= x$

so ist der andere $= \frac{nx}{m}$

Es ist also $x + \frac{nx}{m} = a$

folgl. $x = \frac{ma}{m + n}$

und also der andere Theil $= \frac{nma}{m(m + n)} = \frac{na}{m + n}$

8.

Er habe x rthlr.

so ist $\frac{1}{4}x + \frac{1}{5}x = 2\frac{1}{4}$ rthlr.

folgl. $x = 5$ rthlr.

9.

Das Pferd koste x rthlr.

so ist $\frac{x}{5} + \frac{x}{7} = 48$

folgl. $x = 140$ rthlr.

10.

Die gesuchte Zahl sey x

so ist $\frac{x}{m} + \frac{x}{n} = a$

oder $nx + mx = mna$

folgl. $x = \frac{mna}{m + n}$

11.

Der eine Theil sey x

so ist der andere $46 - x$

Es ist also $\frac{x}{7} + \frac{46 - x}{3} = 10$

folgl. $x = 28$

und der andere Theil $= 46 - 28 = 18$

12.

Der eine Theil sey x, und also der andere $a - x$

so ist $\frac{x}{m} + \frac{a - x}{n} = b$

folgl. $x = \frac{m(nb - a)}{n - m}$ = dem einen Theil

und also ist der andere Theil $a - \frac{m(nb-a)}{n-m} = \frac{an-mnb}{n-m}$

oder $\frac{mnb - an}{m - n} = \frac{n(mb - a)}{m - n}$

13.

Die Anzahl der Studenten sey x

so ist die der Kaufleute $= 4x$

und die der Offiziere $= 2x$

Es ist also $x + 4x + 2x = 266$

folgl. $x = 38$ Studenten

mithin sind 152 Kaufleute

und 76 Offiziere.

14.

Die Anzahl der Cavalleristen sey x

so ist die der Infanteristen $= 9x$

und der Artilleristen $= 3x$

Es ist daher $x + 9x + 3x = 2600$

folgl. $x = 200$ Cavalleristen
mithin sind 600 Artilleristen
und 1800 Infanteristen.

15.

Die Anzahl der Meilen zu Pferde sey $= x$
so ist die zu Wasser $= 3\frac{1}{2}x$
und die zu Fuß $= 2\frac{1}{3} \cdot 3\frac{1}{2}x = 8\frac{1}{6}x$
Es ist also $x + 3\frac{1}{2}x + 8\frac{1}{6}x = 3040$
folgl. $x = 240$ Meilen zu Pferde
heraus folgt 840 — zu Wasser
und 1960 — zu Fuß.

16.

Der kleinste Theil sey x, so ist der zweite mx und der dritte nx, also

$$x + mx + nx = a$$

folgl. $x = \frac{a}{1+m+n}$

und also der zweite Theil $= \frac{ma}{1+m+n}$

und der dritte $= \frac{na}{1+m+n}$

17.

Die Zahl sey $= x$
so ist $\frac{4x}{3} = 24$
folgl. $x = 18$

18.

Der Antheil des A sey = x

so ist der des B $= \frac{11x}{5}$

und der des C $= \frac{16x}{5}$

Es ist daher $x + \frac{11x}{5} + \frac{16x}{5} = 864$

folgl. x = 135 Q. R. für A
mithin 297 Q. R. für B
und 432 Q. R. für C

19.

A erhalte x
so erhält B $1\frac{1}{3}x$
und C 2x

Es ist also $x + 1\frac{1}{3}x + 2x = 1170$
folgl. x = 270 für A
mithin 360 für B
und 540 für C

20.

A stelle x Mann
so muß B $\frac{5x}{3}$ Mann
und C $\frac{7 \cdot 5x}{8 \cdot 3} = \frac{35x}{24}$ Mann stellen

Es ist daher $x + \frac{5x}{3} + \frac{35x}{24} = 594$

folgl. x = 144 Mann für A
mithin 240 Mann für B
und 210 Mann für C

21.

A erhalte x rthlr.

so erhält B $\frac{3x}{2}$

C $\frac{5 \cdot 3x}{4 \cdot 2} = \frac{15x}{8}$

und D $\frac{7 \cdot 15x}{6 \cdot 8} = \frac{105x}{48} = \frac{35x}{16}$

Es ist also $x + \frac{3x}{2} + \frac{15x}{8} + \frac{35x}{16} = 21000$

folgl. x = 3200 rthlr. für A
mithin 4800 rthlr. für B
6000 rthlr. für C
und 7000 rthlr. für D

22.

Wenn der erste Theil = x

so ist der zweite = $\frac{nx}{m}$

und der dritte = $\frac{nqx}{mp}$

Es ist daher $x + \frac{nx}{m} + \frac{nqx}{mp} = a$

folgl. $x = \frac{amp}{mp + np + nq}$

mithin der zweite Theil $= \frac{anp}{mp + np + nq}$

und der dritte Theil $= \frac{anq}{mp + np + nq}$

23.

Wenn seine Einkünfte = x gesetzt werden,
so zahlt er für Kost und Miethe $\frac{1}{3}x$
für Kleidung und Wäsche $\frac{1}{8}x$
für Nebenausgaben $\frac{1}{10}x$
Nun bleiben ihm noch nach der Aufgabe 318 rthlr. übrig.
Es ist also $\frac{1}{3}x + \frac{1}{8}x + \frac{1}{10}x + 318 = x$
folgl. $x = 720$ rthlr.

24.

Sein angelegtes Kapital sey x rthlr.
Da nun 15 Procent $= \frac{3}{20}$ vom ganzen Kapitale ist, so hat er mit x, $\frac{3}{20}x$ gewonnen.
Es ist daher $x + \frac{3}{20}x = 15571$ rthlr.
folgl. $x = 13540$ rthlr.

25.

Das Kapital betrage x rthlr.
so ist $100 : 104\frac{1}{2} = x : \frac{104\frac{1}{2}x}{100}$
Es ist also $\frac{104\frac{1}{2}x}{100} = 13167$ rthlr.
folgl. $x = 12600$ rthlr.

26.

Der vorjährige Ertrag sey x

Da nun $100 : 8 = x : \frac{2}{25}x$

so ist der diesjährige Ertrag $x + \frac{2}{25}x$

Es ist daher $x + \frac{2}{25}x = 1890$

folgl. $x = 1750$

27.

Das Pfund dieser Waare habe x gr. gekostet.
Da nun $12\frac{1}{2}$ Procent der 8te Theil vom ganzen Kapital ist, so ist $\frac{1}{8}x$ gr. gewonnen.

Es ist daher $x + \frac{1}{8}x = 18$

folgl. $x = 16$ gr. Einkaufspreis eines Pfundes

und $73\frac{1}{3}$ rthlr. Einkaufspreis eines Centners.

28.

4 Procent ist $\frac{1}{25}$ vom Kapital, das macht auf 5 Jahr $\frac{5}{25} = \frac{1}{5}$ vom Kapital.

Es ist also $x + \frac{1}{5}x = 8208$

folgl. $x = 6840$ rthlr.

29.

Er habe x rthlr. bei sich gehabt,

so ist sein Verlust $= (\frac{1}{6} + \frac{1}{10})x = \frac{4}{15}x$

und sein Gewinnst $= \frac{1}{3}x$

Es ist daher $\frac{1}{3}x - \frac{4}{15}x = 3$

oder $\frac{1}{15}x = 3$

folgl. $x = 45$

30.

Wenn die eine Zahl x ist,

so ist die andere $96 - x$

Es ist also $x + 16 = 96 - x$
folgl. $x = 40$
und mithin die andere Zahl $= 96 - 40 = 56$

31.

A erhalte x rthlr.
so erhält B $\frac{1}{2}x + 50$ rthlr.
Es ist daher $x + \frac{1}{2}x + 50 = 1200$
folgl. $x = 766\frac{2}{3}$ rthlr. für A
mithin $433\frac{1}{3}$ rthlr. für B

32.

A erhalte x rthlr.
so erhält B $x + 100$ rthlr.
und C $x + 370$ rthlr.
Es ist also $3x + 470 = 1520$
folgl. $x = 350$ rthlr. für A
mithin 450 rthlr. für B
und 720 rthlr. für C

33.

Eine Tochter bekomme x rthlr,, also drei Töchter 3x,
ein Sohn 2x rthlr., also zwei Söhne 4x,
folgl. erhält die Wittwe $7x + 500$ rthlr.
Es ist also $3x + 4x + 7x + 500 = 7500$
folgl. $x = 500$ rthlr. für eine Tochter
mithin 1000 rthlr. für jeden Sohn
und 4000 rthlr. für die Wittwe.

34.

Die Anzahl der Weiber sey x
also ist die der Männer $= x + 4$
und die der Kinder $= 2x + 14$
Es ist also $x + x + 4 + 2x + 14 = 90$
folgl. $x = 18$ Weiber
mithin 22 Männer
und 50 Kinder.

35.

B bekomme x Quadratfuß,
so erhält A $x + 276$
und C $x + 1112$
Es ist daher $x + x + 276 + x + 1112 = 8000$
folgl. $x = 2204$ für B
und hieraus 2480 für A
und 3316 für C

36.

Der jüngste erhalte x rthlr.
der zweite erhält also $x + 20$
der dritte $x + 40$
der vierte $x + 60$
der fünfte $x + 80$
Es ist also $5x + 200 = 1000$
folgl. $x = 160$

37.

Die Summe sey x rthlr.

so erhält A, $\frac{1}{2}x - 3000$
B, $\frac{1}{3}x - 1000$
C, $\frac{1}{4}x + 800$

Es ist daher $\frac{1}{2}x - 3000 + \frac{1}{3}x - 1000 + \frac{1}{4}x + 800 = x$
folgl. $x = 38400$
und hiernach bestimmt man den Antheil eines jeden.

38.

Das hinterlassene Vermögen sey x
so erhält die Frau $\frac{1}{2}x$
jeder Sohn $\frac{1}{6}x$, also beide $\frac{1}{3}x$,
der Bediente $\frac{1}{12}x$
Es ist daher $\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}x + \frac{1}{12}x + 600 = x$
folgl. $x = 7200$
und hiernach findet man den Antheil eines jeden.

39.

A erhalte x Quadratfuß,
so erhält B $\frac{11x}{6}$
und C $x + \frac{11x}{6} + 300$

Es ist also $x + \frac{11x}{6} + x + \frac{11x}{6} + 300 = 2850$
folgl. $x = 450$ für A
und hieraus 825 für B
1575 für C

40.

D erhalte x rthlr.

und C erhält nach der Aufgabe 360 rthlr.

folgl. erhält B, $x + 360$

und A, $2x - 280$

Es ist daher $x + 360 + x + 360 + 2x - 280 = 2520$

folgl. $x = 520$ rthlr. für D

und hieraus 880 rthlr. für B

760 rthlr. für A

41.

A bekomme x rthlr.

so erhält B, $2x + 200$

C, $3x - 400$

D, $\frac{5x - 200}{2} + 150 = \frac{5x - 200 + 300}{2}$

$= \frac{5x + 100}{2}$

E, $\frac{6x - 200 + \frac{5x + 100}{2}}{4} + 475$

$= \frac{17x - 300}{8} + 475 = \frac{17x - 300 + 3800}{8}$

$= \frac{17x + 3500}{8}$

Es ist also

$$x + 2x + 200 + 3x - 400 + \frac{5x+100}{2} + \frac{17x+3500}{8} = 5600$$

folgl. $x =$ 500 für A

und hieraus 1200 für B

1100 für C

1300 für D

1500 für E

42.

A habe x rthlr. verloren,
so hat B, $3x + \frac{1}{2}$ rthlr.
C, $6x - 1$ rthlr.
D, $4x + \frac{1}{4}$ rthlr.
und E, $6x + \frac{7}{8}$ rthlr.
verloren. Es ist daher

$$x + 3x + \tfrac{1}{2} + 6x - 1 + 4x + \tfrac{1}{4} + 6x + \tfrac{7}{8} = 40\tfrac{5}{8} \text{ rthlr.}$$

folgl. $x = 2$ rthlr. für A, und hieraus $6\frac{1}{2}$ für B, 11 für C, $8\frac{1}{4}$ für D, $12\frac{7}{8}$ für E.

43.

Es mögen x Centner verkauft worden seyn, man behielt also $40 - x$ Centner übrig.

Es ist daher $40 - x = x + 8$
folgl. $x = 16$

44.

Er habe x rthlr. ausgegeben,
so blieben ihm noch $42 - x$
Es ist also $42 - x = 3x$
folgl. $x = 10\frac{1}{2}$ rthlr.

45.

A habe x rthlr. gewonnen; er besitzt also nach dem Spiele $42 + x$
und B, $24 - x$
Es ist also $42 + x = (24 - x)\, 5$
folgl. $x = 13$

46.

Die Anzahl der Cavalleristen sey x

so ist die der Infanteristen $= 1250 - x$

Es ist daher $5x + (1250 - x)\,3 = 4150$

folgl. $x = 200$ Cavalleristen

und also 1050 Infanteristen.

47.

Sie mögen x Tage gearbeitet haben,

so hat der Meister $\frac{1}{2}x$ rthlr.

der Geselle $\frac{5}{12}x$, also 12 Gesellen $5x$,

der Handlanger $\frac{1}{3}x$ erhalten, also 4 Handlanger $\frac{4x}{3}$

Es ist daher $\frac{1}{2}x + 5x + \frac{4}{3}x = 61\frac{1}{2}$ rthlr.

folgl. $x = 9$ Tage.

48.

Das sämmtliche Kapital sey x

Es ist daher $\frac{1}{25} \cdot \frac{4}{5}x + \frac{1}{20} \cdot \frac{1}{5}x = 2940$ rthlr.

folgl. $x = 70000$ rthlr.

49.

Die Zahl sey x

so ist $\frac{7x + 3}{2} - 4 = 15$

folgl. $x = 5$

50.

Eine Zahl sey x

so ist die zweite $2x + 1$

die dritte $6x + 6$

Es ist daher $9x + 7 = 70$
folgl. $x = 7$, mithin die zweite $= 15$
und die dritte $= 48$

51.

Er habe x Groschen bei sich,
so ist $\frac{(5x - 3)\ 4 + 2}{10\ *)} = 23$
folgl. $x = 12$

52.

Die Zahl sey x
so ist $\frac{5x - 24}{6} + 13 = x$
folgl. $x = 54$

53.

In x Tagen mag er ihn einholen,
so hat der erste $40 + 4x$
und der zweite 9x Meilen zurückgelegt.
Es ist daher $40 + 4x = 9x$
folgl. $x = 8$

54.

Er hole den Boten in x Tagen ein,
so hat der erste $na + ax$
und der zweite bx Meilen gemacht.

---

*) Die 0 zur rechten einer Zahl weglassen, heißt so viel, als die Zahl durch 10 dividiren.

Es ist also $na + ax = bx$

folgl. $x = \frac{na}{b - a}$

55.

Der zweite Bote erreiche den ersten in x Tagen, alsdann war der erste $x + 12$ Tage auf der Reise. Die Geschwindigkeit des zweiten zum ersten verhält sich wie $8:3$, d. h. wenn der zweite in einem Tage 8 Meilen zurücklegt, so legt der erste nur 3 Meilen zurück. Der zweite hat also 8x Meilen und der erste $3(x+12)$ Meilen gemacht, und da sie beide einen gleich großen Weg zurück gelegt haben,

so ist $8x = 3\ (x + 12)$

folgl. $x = 7\frac{1}{5}$ Tage.

56.

Der zweite Körper erreiche den ersten in x Secunden, alsdann war der erste $x + n$ Secunden unterweges. Es ist demnach $qx = p\ (x + n)$

folgl. $x = \frac{pn}{q - p}$

57.

In x Stunden nach der Abreise des ersten Couriers mögen sie zusammentreffen. Da nun der erste Courier in 5 Stunden 7 Meilen macht, so macht er in einer Stunde $\frac{7}{5}$ Meilen; der zweite legt in 3 Stunden 5 Meilen zurück, folglich macht er in einer Stunde $\frac{5}{3}$ Meilen.

Der erste hat also überhaupt

$$\tfrac{7}{5} \cdot 8 + \tfrac{7}{5}x = 11\tfrac{1}{5} + \frac{7x}{5} \text{ Meilen}$$

und der zweite $\frac{5x}{3}$ zurückgelegt.

Es ist daher $11\frac{1}{5} + \frac{7x}{5} = \frac{5x}{3}$

folgl. $x = 42$ Stunden.

58.

Der erste hat $8 + 11\frac{1}{5} + \frac{7x}{5}$

und der zweite hat $\frac{5x}{3}$ Meilen zurückgelegt.

Es ist daher $8 + 11\frac{1}{5} + \frac{7x}{5} = \frac{5x}{3}$

folgl. $x = 72$

59.

Die Zeit, in welcher beide Couriere zusammentreffen, nachdem der zweite abgereist, sey $= x$,

so hat der erste $a + \frac{bc}{d} + \frac{cx}{d}$

und der zweite $\frac{ex}{f}$ Meilen zurückgelegt.

Es ist also $a + \frac{bc}{d} + \frac{cx}{d} = \frac{ex}{f}$

folgl. $x = \frac{(ad + bc)\,f}{de - cf}$

60.

Es sey wieder die Zeit, in welcher beide Cou-

riere zusammentreffen, nachdem der zweite abgereist, $= x$,

so hat der erste $\frac{bc}{d} + \frac{cx}{d} - a$

und der zweite $\frac{ex}{f}$ Meilen zurückgelegt.

$$\text{Es ist also } \frac{bc}{d} + \frac{cx}{d} - a = \frac{ex}{f}$$

$$\text{folgl. } x = \frac{(bc - ad)\, f}{de - cf}$$

61.

Die Regimenter mögen sich in x Tagen nach dem Ausmarsche des zweiten begegnen, so hat

A, $3\frac{1}{2} \cdot 8 + 3\frac{1}{2}x = 28 + 3\frac{1}{2}\, x$

und B, $5\frac{1}{6}x$ Meilen gemacht.

Es ist daher $3\frac{1}{2}x + 5\frac{1}{6}x + 28 = 80$

folgl. $x = 6$ Tage nach dem Ausmarsche des zweiten, und mithin 14 Tage nach dem Ausmarsche des ersten.

62.

Die beiden Körper werden in x Secunden zusammenstoßen. Der eine hat also in diesen x Secunden cx Fuß, und der andere Cx Fuß durchlaufen.

$$\text{Es ist also } cx + Cx = d$$

$$\text{folgl. } x = \frac{d}{C + c}$$

63.

Der zweite wird den ersten Körper in x Secun=

den erreichen, und macht also Cx Fuß, während der erste $d + cx$ Fuß zurücklegt.

Es ist demnach $Cx = d + cx$

folgl. $x = \frac{d}{C - c}$

64.

Die Anzahl der vom nachsetzenden Corps täglich zu machenden Meilen sey x,

so hat das erste Corps $2 \cdot 4\frac{1}{2} + 6 \cdot 4\frac{1}{2} = 36$

und das nachsetzende 6x Meilen gemacht.

Es ist daher $6x = 36$

folgl. $x = 6$ Meilen.

65.

In x Secunden wird der zweite Körper den ersten erreichen, der zweite hat also Cx Fuß durchlaufen, und da der erste bereits d Fuß voraus hatte, und schon t Secunden in Bewegung war, bevor der zweite zu laufen anfing, so ist der Weg des ersten = d Fuß + ct Fuß + cx Fuß.

Es ist demnach $Cx = d + ct + cx$

folgl. $x = \frac{d + ct}{C - c}$

66.

Mit Bezug auf die vorhergehende Aufgabe erhält man die Gleichung

$$Cx + ct + cx = d$$

folgl. $x = \frac{d - ct}{C + c}$

67.

Man nehme an, der Stunden- und Minutenzeiger stehe auf 12. Nun mag der Stundenzeiger, nachdem er sich x Minuten vorwärts bewegt hat, von dem Minutenzeiger eingeholt worden seyn. Der Minutenzeiger muß also während der Zeit, in welcher der Stundenzeiger die x Minuten zurücklegt, nicht allein diese x Minuten, sondern auch noch den ganzen Stundenkreis, das sind 60 Minuten, durchlaufen haben. Oder: während der Stundenzeiger x Minuten gemacht hat, muß der Minutenzeiger x + 60 Minuten gemacht haben. Da nun die Geschwindigkeit des Minutenzeigers 12mal so groß ist als die des Stundenzeigers, oder da der Minutenzeiger bei einer gleichzeitigen Bewegung mit dem Stundenzeiger einen 12mal so großen Raum zurücklegt, so müssen auch x + 60 Minuten einen 12mal so großen Raum als x Minuten ausmachen;

das ist $x + 60 = 12x$

oder $11x = 60$

folgl. $x = 5\frac{5}{11}$ Minuten,

wo sie sich zum erstenmal decken. Gehet der Stundenzeiger abermals $5\frac{5}{11}$ Minuten, so decken sie sich zum zweitenmal rc. Die Zeiger decken sich also bei $5\frac{5}{11}$ Minuten nach eins, $10\frac{10}{11}$ Minuten nach zwei, $16\frac{4}{11}$ Minuten nach drei rc., und da $5\frac{5}{11}$ in 60 11mal enthalten ist, so werden beide Zeiger 11mal zusammentreffen.

68.

Da beide Körper anfänglich d Fuß von einander entfernt waren, so erreicht der zweite Körper den ersten in $\frac{d}{C-c}$ Secunden (Auflösung 63). Soll nun der zweite Körper den ersten zum zweitenmal erreichen, so muß er außer dem Weg, den der erste macht, auch noch den ganzen Kreis durchlaufen, und die Entfernung beider Körper ist daher, bevor sie sich zu bewegen anfangen, $= p$ Fuß; der zweite erreicht also den ersten in $\frac{p}{C-c}$ Secunden. Betrachtet man folglich die Zeit, in welcher beide Körper seit ihrem ersten Auslaufen zum zweitenmal zusammentreffen, so ist solche $= \frac{p}{C-c} + \frac{d}{C-c} = \frac{p+d}{C-c}$ Secunden. Auf gleiche Art findet man die Zeit, in welcher beide Körper zum drittenmal zusammentreffen, $= \frac{p}{C-c} + \frac{p+d}{C-c}$ $= \frac{2p+d}{C-c}$ Sec. ꝛc.

69.

Nach der 65sten Auflösung ist es einleuchtend, daß zur Bewegung des ersten Körpers noch der Ausdruck ct hinzu kommen muß. Die anfängliche Entfernung beider Körper ist daher $d + ct$, und sie erreichen sich also zum erstenmal, nach der vorhergehenden Auflösung, in $\frac{d+ct}{C-c}$ Secunden, zum zwei-

tenmal in $\frac{p + d + ct}{C - c}$ Secunden, zum drittenmal in $\frac{2p + d + ct}{C - c}$ Secunden rc.

70.

Fängt sich der erste um t Secunden später zu bewegen an als der zweite ihm folgende Körper, so ist alles wieder wie vorher, nur mit dem Unterschiede, daß nun die anfängliche Entfernung nicht um ct größer, sondern geringer ist. Der Ausdruck ct muß daher immer abgezogen werden, und es ist demnach die Zeit des ersten Zusammentreffens $= \frac{d - ct}{C - c}$ Sec., die des zweiten $= \frac{p + d - ct}{C - c}$ Sec., die des dritten $= \frac{2p + d - ct}{C - c}$ Secunden rc.

71.

Beide Körper waren anfänglich um d Fuß von einander entfernt. Der erste hat sich um t Secunden früher zu bewegen angefangen, die Entfernung des zweiten ihm entgegen laufenden Körpers ist daher zu Anfange seiner Bewegung = d — ct Fuß. Hiernach geschiehet folglich das erste Zusammentreffen beider Körper in $\frac{d - ct}{C + c}$ Secunden. Um sich nun zum zweitenmal zu begegnen, so müssen beide Körper zusammen den Raum p durchlaufen, ihre Entfernung ist daher = p, und

sie begegnen sich also zum zweitenmal in $\frac{p}{C + c}$ Secunden. Der Zeitraum vom ersten Anfange der Bewegung bis zum zweiten Zusammentreffen ist demnach $= \frac{d - ct}{C + c} + \frac{p}{C + c} = \frac{p + d - ct}{C + c}$ Sec. ꝛc.

72.

Da der erste Körper sich um t Secunden später als der zweite zu bewegen anfängt, so ist es in Hinsicht des Zusammentreffens beider Körper eben so gut, als wenn der erste gleich anfänglich außer der Entfernung d auch noch um den Raum, den er in t Secunden zurücklegen kann, von dem zweiten entfernt sey. Die anfängliche Entfernung ist daher $= d + ct$, und das Zusammentreffen beider Körper geschieht demnach in $\frac{d + ct}{C + c}$ Sec. Hiernach geschiehet das zweite Zusammentreffen, nach voriger Aufgabe, in $\frac{p + d + ct}{C + c}$ Secunden ꝛc.

73.

Es ist einleuchtend, daß die Größe der Wassermenge, welche ein Behälter in einem gewissen Zeitraume schüttet, in genauem Verhältniß stehet mit der Größe der Mündung, und mit dem Grade der Geschwindigkeit, womit das Wasser in einer Secunde ausströmt. Es ist demnach das Verhältniß der Wassermengen von beiden Behältern für einen gleichen

Zeitraum zusammengesetzt aus den Zahlen, welche die Größe der Mündung und die Grade der Geschwindigkeit ausdrücken. Nun sind die beiden Verhältnißzahlen des einen Behälters 5 und 8, und die des zweiten Behälters 13 und 7. Es verhalten sich also beide Wassermengen für einen gleichen Zeitraum wie 40 : 91 Es fließe nun aus der ersten Oeffnung x Cubikfuß, so fließt aus der andern in derselben Zeit x + 561 Cubikfuß. Es ist daher

$$40 : 91 = x : x + 561$$

folgl. $x = 440$ Cubikf.

74.

Die Anzahl der Sprünge, welche der Hase noch machen kann, ehe der Hund ihn einholt, sey x. Da nun der Hase 6 Sprünge macht, während der Hund 5 Sprünge zurücklegt, so muß der Hund in dem Augenblick, wo er den Hasen eingeholt hat, $\frac{5}{6}x$ Sprünge gemacht haben. Der Hund hat also durch die größere Weite seiner Sprünge nicht allein $\frac{1}{6}x$ Hasensprünge, sondern auch noch die 50 Sprünge, welche der Hase bereits voraus hatte,

also $\frac{1}{6}x + 50$ Hasensprünge

eingebracht. Nun gehen 7 Hundesprünge auf 9 Hasensprünge, folgl. gewinnt der Hund bei jedem Sprung $\frac{2}{7}$ Hasensprünge; da er nun $\frac{5}{6}x$ Sprünge gemacht hat, so muß er $\frac{2}{7} \cdot \frac{5}{6}x$ Sprünge gewonnen haben, und da er hierdurch $\frac{1}{6}x + 50$ Hasensprünge einbringt, so ist

$$\frac{2}{7} \cdot \frac{5}{6}x = \frac{1}{6}x + 50$$
folgl. $x = 700$.

75.

Die Anzahl der Würfe, die der zweite zu machen hat, sey x, so hat der erste in derselben Zeit $\frac{8}{7}x$, also überhaupt

$$\frac{8}{7}x + 36 \text{ Würfe}$$

gemacht. Da nun der zweite zu 3 Würfen so viel Pulver als der erste zu 4 bedarf, so verhält sich die Quantität des Pulvers, welche der zweite bei einem Wurfe gebraucht, zu der, welche der erste bedarf, wie 4 : 3. Da sich aber bei gleichem Pulverbedarf die Anzahl der Würfe umgekehrt wie die Quantitäten des Pulvers bei einem Wurfe verhalten, so ist

$$x : \frac{8}{7}x + 36 = 3 : 4$$

oder $4x = \frac{24x}{7} + 108$

folgl. $x = 189$

76.

Der vorgeeilte heiße A und der zurückgebliebene B. Es habe B x Fuß, also A $x + 3000$ Fuß zurückgelegt. Nun verhält sich die Anzahl der Schritte des A zu der des B wie 5 : 1, ferner verhält sich die Größe des Schrittes von A zu der des B wie 1 : 2. Da nun das Verhältniß des zurückgelegten Weges beider Spaziergänger aus den Verhältnissen der An=

zahl und Größe ihrer Schritte zusammengesetzt ist, so verhalten sich die zurückgelegten Wege wie $5 \cdot 1 : 1 \cdot 2 = 5 : 2$. Es ist also

$$x + 3000 : x = 5 : 2$$
$$\text{oder } 5x = 2x + 6000$$
$$\text{folgl. } x = 2000 \text{ Fuß für B}$$
$$\text{und also } 5000 \text{ Fuß für A}$$

77.

Die Anzahl der Fuße, welche A zurückgelegt hat, sey x, so sind die Anzahl Fuße von B, $x + a$. Nun verhält sich die Anzahl der Schritte des A zu der des B wie $d : e$; ferner verhält sich die Größe des Schrittes von A zu der des Schrittes von B wie $b : c$. Das zusammengesetzte Verhältniß der zurückgelegten Wege von A und B ist daher $= bd : ce$. Es ist also

$$x : x + a = bd : ce$$
$$\text{oder } cex = bdx + abd$$
$$\text{folgl. } x = \frac{abd}{ce - bd} \text{ für A}$$
$$\text{und mithin ist der Weg des B} = \frac{abd}{ce - bd} + a$$
$$= \frac{ace - abd + abd}{ce - bd} = \frac{ace}{ce - bd}$$

78.

Nach den in der 73sten Auflösung angestellten Betrachtungen erhält man hier

$$mn' : nn' = x : x + d$$

folgl. $x = \frac{mm'd}{nn' - mm'}$ 2c.

79.

Diese Auflösung wird durchaus so behandelt wie die vorhergehende.

80.

In diesem Falle erhält man

$$mm'm'' : nn'n'' = x : S - x$$

folgl. $x = \frac{mm'm''S}{nn'n'' + mm'm''}$ 2c.

81.

x sey die Anzahl der Jahre, in welchen beide Kapitalien zusammen auf Zinsen gestanden haben, d. h. 5500 rthlr. haben $4\frac{1}{2} + x$ Jahre zu 4 Procent, und 8000 rthlr. haben x Jahre zu 5 Procent gestanden. Nun haben die 5500 in $4\frac{1}{2}$ Jahren 990 rthlr. Zinsen getragen, folglich betragen die Interessen von diesem Kapitale $990 + \frac{1}{25} \cdot 5500 \cdot x = 990 + 220x$. Da nun die Interessen von 8000 rthlr. zu 5 Procent in x Jahren $\frac{1}{20} \cdot 8000 \cdot x = 400x$ machen, so ist

$$990 + 220x = 400x$$

folgl. $x = 5\frac{1}{2}$ Jahre.

d. h. $5\frac{1}{2}$ Jahre sind beide Kapitalien zusammen, und folglich das erste Kapital $5\frac{1}{2} + 4\frac{1}{2} = 10$ Jahre ausgeliehen gewesen.

82.

Das hintere Rad habe x Umläufe, also das vordere x + 2000 Umläufe gemacht. Da nun das hintere Rad $7\frac{1}{8}$ Fuß im Umfange hat, und daher auch bei jedem Umlauf $7\frac{1}{8}$ Fuß Weg zurücklegt, so hat es bei x Umläufen $7\frac{1}{8}x$ Fuß, und eben so das vordere $(x + 2000)\ 5\frac{1}{4} = 5\frac{1}{4}x + 10500$ Fuß zurückgelegt. Da nun der zurückgelegte Weg des hintern und vordern Rades gleich seyn muß, so ist

$$7\frac{1}{8}x = 5\frac{1}{4}x + 10500$$

folgl. $x = 5600$

und mithin ist der zurückgelegte Weg

$$= 7\frac{1}{8} \cdot 5600 = 39900 \text{ Fuß.}$$

83.

Das hintere Rad habe x, also das vordere x+n Umläufe gemacht. Das hintere Rad hat also bx Fuß und das vordere (x+n) a Fuß zurückgelegt. Es ist daher

$$bx = (x + n)\ a$$

folgl. $x = \frac{an}{b - a}$

die Anzahl der Umläufe des hintern Rades; und mithin ist der zurückgelegte Weg

$$\frac{an}{b - a} \cdot b = \frac{abn}{b - a}$$

84.

Er nehme x Quart zu 36 gr., und also 50 — x zu 20 gr. Diese Mischung kostet daher

$$36x + 20\ (50 - x)$$

Nach der Aufgabe soll hiervon das Quart 30 gr., folglich die ganze Mischung $50 \cdot 30 = 1500$ gr. kosten. Es ist also

$$36x + 20\ (50 - x) = 1500$$

folgl. $x = 31\frac{1}{4}$ Quart à 36 gr.

und mithin $18\frac{3}{4}$ à 20 gr.

85.

Er nehme x Quart zu a gr. und also $n - x$ Quart zu b gr. Diese Mischung kostet daher $ax + (n - x)\,b$. Nach der Aufgabe soll hiervon das Quart c gr. und folglich die ganze Mischung nc gr. kosten. Es ist daher

$$ax + (n - x)\ b = nc$$

folgl. $x = \frac{n\ (c - b)}{a - b}$ zu a gr.

und mithin $n - x = n - \frac{n\ (c - b)}{a - b}$

$$= \frac{n\ (a - b) - n\ (c - b)}{a - b} = \frac{n\ (a - c)}{a - b}$$

vom Weine zu b gr.

86.

Er nehme x Mark 14löthiges und also $20 - x$ 8löthiges Silber, so ist in der Schmelzung

$14x + 8\ (20 - x)$ Loth Silber enthalten.

Nach der Aufgabe soll diese Schmelzung 12löthig seyn, also $20 \cdot 12 = 240$ Loth Silber enthalten. Es ist demnach

$$14x + 8(20 - x) = 240$$

folgl. $x = 13\frac{1}{3}$ Mark 12löthiges Silber,
und mithin $6\frac{2}{3}$ Mark 8löthiges Silber.

87.

40 Quart Wein à 1 rthlr. 8 gr. betragen 1280 gr. Er habe nun x Quart Wasser zugemischt, so enthält die Mischung $x + 40$ Quart. Hiervon will er das Quart für 20 Groschen verkaufen; er erhält also dafür $(x + 40)$ 20 gr. Es ist also

$$(x + 40)\,20 = 1280$$

folgl. $x = 24$ Quart Wasser.

88.

35 Mark à 15 Loth betragen 525 Loth reines Silber. Er habe nun x Mark Kupfer zugesetzt, so beträgt die Schmelzung $35 + x$ Mark. Hiervon soll die Mark 12 Loth Silber enthalten; es ist also

$$(35 + x)\,12 = 525$$

folgl. $x = 8\frac{3}{4}$ Mark Kupfer.

89.

$7\frac{1}{2}$ Mark 13löthiges Silber enthalten $97\frac{1}{2}$ Loth reines Silber. Hierzu habe man x Mark 8löthiges gesetzt, so enthält die Schmelzung $97\frac{1}{2} + 8x$ Loth Silber und wiegt $7\frac{1}{2} + x$ Mark. Da aber die Mark 9 Loth Silber enthalten soll, so enthält die Schmelzung $(7\frac{1}{2} + x)$ 9 Loth. Es ist demnach

$$97\tfrac{1}{2} + 8x = (7\tfrac{1}{2} + x)\,9$$

folgl. $x = 30$ Mark 8löthiges Silber.

90.

Ist die Anzahl der Viergroschenstücke x, so ist die der Sechsgroschenstücke 17 — x. Es ist daher

$$4x + (17 - x)\ 6 = 90 \text{ gr.}$$

folgl. $x = 6$ Viergroschenstücke,

und also 11 Sechsgroschenstücke.

91.

Die eine Zahl sey x

so ist die andere $a - x$

Es ist demnach $mx + n\,(a - x) = b$

folgl. $x = \frac{b - an}{m - n}$ ꝛc.

92.

Nach x Jahren. Alsdann ist der Vater $40 + x$ und der Sohn $9 + x$ Jahre alt. Es ist also

$$40 + x = 2\,(9 + x)$$

folgl. $x = 22$ Jahre.

93.

Nach x Jahren. Alsdann ist der eine $30 + x$ und der andere $20 + x$ Jahre alt. Mithin ist

$$30 + x : 20 + x = 5 : 4$$

also $4\,(30 + x) = 5\,(20 + x)$

folgl. $x = 20$ Jahre.

94.

Vor x Jahren. Damals war der ältere $30 - x$ und der jüngere $20 - x$ Jahre alt. Es ist also

$$30 - x = 6\,(20 - x)$$
folgl. $x = 18$ Jahre.

95.

Nach x Jahren. Alsdann ist der ältere $30 + x$, der mittlere $20 + x$ und der jüngste $6 + x$ Jahre alt. Es ist daher

$$30 + x = 20 + x + 6 + x$$
folgl. $x = 4$ Jahre.

96.

Vor x Jahren. Damals war der Vater $49 - x$ und die drei Brüder zusammen waren $30 - x + 20 - x + 6 - x$ Jahre alt. Es ist daher

$$49 - x = 30 - x + 20 - x + 6 - x$$
folgl. $x = 3\frac{1}{2}$ Jahre.

97.

Vor x Jahren. Damals war der Vater $49 - x$ Jahre, und die beiden Söhne waren $30 - x + 20 - x$ Jahre alt. Es ist also

$$49 - x = 50 - 2x + \frac{50 - 2x}{4}$$
folgl. $x = 9$ Jahre.

98.

Nach der Aufgabe enthält die Masse von 80 Pfund 56 Pfund Salpeter und 24 Pfund Schwefel. Nun mögen x Pfund Salpeter zugesetzt werden, so ist

$$56 + x : 24 = 11 : 4$$

$$\text{also } 4\,(56+x) = 11 \cdot 24$$

$$\text{folgl. } x = 10 \text{ Pfund Salpeter.}$$

99.

x Pfund Schwefel. Alsdann ist

$$56 : 24-x = 11 : 4$$

$$\text{also ist } 4 \cdot 56 = 11\,(24-x)$$

$$\text{folgl. } x = 3\tfrac{7}{11} \text{ Pfund Schwefel.}$$

100.

x Pfund. Alsdann ist

$$56+x : 24-x = 11 : 4$$

$$\text{also ist } 4\,(56+x) = 11\,(24-x)$$

$$\text{folgl. } x = 2\tfrac{2}{3} \text{ Pfund.}$$

101.

War anfänglich die Anzahl der Damen $= x$, so war die der Herren $= 3x$. Nachdem also 8 Männer mit ihren Frauen weggingen, blieben noch $3x-8$ Herren und $x-8$ Damen zurück. Es ist daher

$$3x-8 : x-8 = 5 : 1$$

$$\text{also } 3x-8 = (x-8)\,5$$

$$\text{folgl. } x = 16 \text{ Damen,}$$

$$\text{und also } 48 \text{ Herren.}$$

102.

Die Zahl, welche zu den beiden gegebenen Zahlen addirt werden muß, sey x, so ist

$$a+x : b+x = m : n$$

$$\text{also } an + nx = bm + mx$$

$$\text{folgl. } x = \frac{bm - an}{n - m}$$

103.

Die gesuchte Zahl sey x, so ist

$$a + x : b - x = m : n$$

$$\text{also } an + nx = bm - mx$$

$$\text{folgl. } x = \frac{bm - an}{m + n}$$

104.

Die verlangte Zahl sey x, so ist

$$a - x : b - x = m : n$$

$$\text{also } an - nx = bm - mx$$

$$\text{folgl. } x = \frac{an - bm}{n - m}$$

105.

In x Stunden. In dieser Zeit ist durch das erste Spundloch $\frac{x}{2}$, durch das zweite $\frac{x}{3}$, und durch das dritte $\frac{x}{4}$ vom Weine ausgelaufen. Es ist daher

$$\frac{x}{2} + \frac{x}{3} + \frac{x}{4} = 1$$

folgl. $x = \frac{12}{13}$ Stunden $= 55\frac{5}{13}$ Minuten.

106.

In x Stunden. In dieser Zeit ist durch die erste

Röhre $\frac{x}{1\frac{1}{3}} = \frac{3x}{4}$, durch die zweite $\frac{x}{3\frac{1}{3}} = \frac{3x}{10}$, durch die dritte $\frac{x}{5}$ vom Wasserbehälter gefüllt worden. Es ist daher

$$\frac{3x}{4} + \frac{3x}{10} + \frac{x}{5} = 1$$

folgl. $x = \frac{4}{5}$ Stunden $= 48$ Minuten.

107.

Es sey x die gesuchte Zeit, so ist, wie in voriger Auflösung,

$$\frac{x}{a} + \frac{x}{b} + \frac{x}{c} = 1$$

folgl. $x = \frac{abc}{ab + ac + bc}$

108.

Wenn die gesuchte Zeit gleich x, so ist

$$\frac{x}{a} + \frac{x}{b} + \frac{x}{c} + \frac{x}{d} = 1$$

folgl. $x = \frac{abcd}{abc + abd + acd + bcd}$

109.

Die Zeit, welche dazu erforderlich ist, sey $= x$, so hat der erste $\frac{8x}{5}$, der zweite $\frac{9x}{4}$, der dritte $\frac{10x}{6}$ Cubikfuß verfertigt. Es ist daher

$$\frac{8x}{5} + \frac{9x}{4} + \frac{10x}{6} = 756$$

folgl. $x = 137\frac{13}{331}$ Tage.

110.

Auch hier sey die Zeit = x, so ist wie vorher

$$\frac{ax}{b} + \frac{cx}{d} + \frac{ex}{f} = g$$

$$\text{folgl. } x = \frac{bdfg}{adf + bcf + bde}$$

111.

In x Tagen. In dieser Zeit füllt die erste $\frac{12x}{3\frac{1}{4}} = \frac{48x}{13}$, die zweite $\frac{15\frac{1}{3}x}{2\frac{1}{2}} = \frac{92x}{15}$, und die dritte $\frac{17x}{3}$ Cubikfuß. Es ist daher

$$\frac{48x}{13} + \frac{92x}{15} + \frac{17x}{3} = 755\tfrac{1}{4}$$

folgl. $x = 48\frac{1}{4}$ Tage.

112.

Die gesuchte Zeit sey x, so ist

$$\frac{ex}{t} + \frac{e'x}{t'} + \frac{e''x}{t''} = E$$

$$\text{folgl. } x = \frac{Ett't''}{et't'' + e'tt'' + e''tt'}$$

113.

Ein jedes Stück Metall betrage x Cubikzoll, so wiegt das erste $\frac{69\frac{3}{4}x}{5} = \frac{279x}{20}$, das zweite $\frac{41x}{3\frac{1}{3}} = \frac{123x}{10}$, das dritte $\frac{91x}{4\frac{2}{7}} = \frac{637x}{30}$ Loth. Es ist demnach

$$\frac{279x}{20} + \frac{123x}{10} + \frac{637x}{30} = 949\tfrac{2}{3}$$

$$\text{folgl. } x = 20.$$

114.

Die Gesellschaft bestehe aus x Personen, so sind, nach der Aufgabe, 16x Groschen um 240 gr. mehr als man bedarf; 10x Groschen hingegen um 300 gr. weniger als gebraucht wird. Es sind demnach 16x Groschen nicht allein um 240, sondern auch noch um 300, also um 540 Groschen mehr als 10x Groschen. Es ist also

$$16x = 10x + 540$$

folgl. $x = 90$ Personen u. s. w.

115.

Das Gewicht der Waare sey x Pfund. Da nun 30x Groschen 120 Groschen mehr, und 22x Groschen 360 Groschen weniger als der Einkaufspreis sind, so sind 30x Groschen um 120 + 360 = 480 Groschen mehr als 22x Groschen. Es ist demnach

$$30x = 22x + 480$$

folgl. $x = 60$ Pfund u. s. w.

116.

Er habe x Loose ausgespielt. Da nun 30 Groschen um 480 Groschen weniger, und 40x Groschen um 320 Groschen mehr sind als die Uhr gekostet hat, so sind 30x Groschen um 480 + 320 = 800 Groschen weniger als 40x Groschen. Es ist demnach

$$30x + 800 = 40x$$

folgl. $x = 80$ Loose u. s. w.

117.

Die Anzahl der Maurer sey x, so folgt aus der Aufgabe, daß mx Groschen um a weniger und nx Groschen um b mehr ist, als veranschlagt worden; mx ist also um a + b weniger als nx. Es ist daher

$$mx + a + b = nx$$

folgl. $x = \frac{a + b}{n - m}$ Anzahl der Maurer ꝛc.

118.

Es sey x die erste gesuchte Zahl, so ist

$mx - a =$ der andern Zahl

und auch $m'x - a' =$ dieser Zahl

folgl. $mx - a = m'x - a'$

und also $x = \frac{a - a'}{m - m'}$

und die andere Zahl

$$= mx - a = m\frac{a - a'}{m - m'} - a = \frac{m'a - ma'}{m - m'}$$

119.

Die Zahl sey x, so ist nach der Aufgabe

$$5x - 20 = 20 - x$$

folgl. $x = 6\frac{2}{3}$

120.

Das jährliche Einkommen sey x, so ist das, was

ihm noch fehlt, um seine Ausgaben zu bestreiten, 540 — x. Hat er aber $3\frac{1}{2}x$, so hat er mehr wie er bedarf; dieser Ueberschuß ist aber nothwendig $= 3\frac{1}{2}x - 540$. Es ist daher

$$3\tfrac{1}{2}x - 540 = 540 - x$$

folgl. $x = 240$ rthlr. jährliches Einkommen.

121.

Er schreibe, zu 4 Stunden täglich, wöchentlich x Bogen, so ist das, was noch fehlt an 70 Bogen, $= 70 - x$. Arbeitet er aber 10 Stunden täglich, das ist eine $2\frac{1}{2}$ mal längere Zeit als 4 Stunden, so liefert er wöchentlich $2\frac{1}{2}x$ Bogen, welches, nach der Aufgabe, mehr als 70 Bogen beträgt. Dieser Ueberschuß ist aber $= 2\frac{1}{2}x - 70$. Es ist daher

$$2\tfrac{1}{2}x - 70 = 70 - x$$

folgl. $x = 40$ Bogen.

123. *)

Die Entfernung sey x Fuß, so ist das, was noch an 1000 fehlt, $= 1000 - x$. Verfährt er aber mit der Entfernung x wie es der zweite Theil der Aufgabe vorschreibt, so giebt dieses $(\frac{4}{3}x + 176)\, 2\frac{1}{2}$, welches, nach der Aufgabe, mehr als 1000 beträgt. Den Ueberschuß findet man, indem man setzt $(\frac{4}{3} + 176)\, 2\frac{1}{2} - 1000$. Es ist daher

*) In den Aufgaben ist die Paragraphenzahl 122 aus Versehen des Hrn. Verfassers übersprungen worden.

$$\left(\tfrac{4}{3}x + 176\right) 2\tfrac{1}{2} - 1000 = 1000 - x$$
$$\text{folgl. } x = 360 \text{ Fuß.}$$

124.

Die Zahl der Schuldner sey x. Da nun 250x um 2000 rthlr. zu wenig, 340x aber um 880 rthlr. zu viel ist, so ist 340x um $2000 + 880 = 2880$ größer als 250x. Es ist daher

$$340x = 250x + 2880$$
$$\text{folgl. } x = 32 \text{ Schuldner ꝛc.}$$

125.

Es ist einleuchtend, daß sich, bei gleichen Procenten, die Interessen von verschiedenen Kapitalien in verschiedenen Zeiten, wie die Producte aus den Zeiten in die Kapitalien verhalten. Denn es sey z. B. ein Kapital a zu p Procent jährliche Zinsen ausgeliehen, so betragen die Interessen auf ein Jahr $\frac{ap}{100}$ und auf m Jahre $\frac{amp}{100}$. Nun sey ein anderes Kapital b ebenfalls zu p Procent jährliche Zinsen ausgeliehen, so betragen die Interessen auf ein Jahr $\frac{bp}{100}$ und auf n Jahre $\frac{bpn}{100}$. Es verhalten sich also die Interessen, welche die Kapitalien a und b in den Zeiten m und n getragen haben, wie $\frac{apm}{100} : \frac{bpn}{100} = am : bn$. Soll daher die Zahlung nach x Monaten geschehen, so ist

$$6842x = 2832 \cdot 3 + 2560 \cdot 9 + 1450 \cdot 16$$
folgl. $x = 8$ Monate.

126.

Ist auch hier die gesuchte Anzahl der Monate $= x$, und schließt man wie in der vorigen Auflösung, so ist

$$x\,(a + b + c + d) = al + bm + cn + dp$$
folgl. $x = \frac{al + bm + cn + dp}{a + b + c + d}$

127.

Noch x Monate. Alsdann haben die 5000 rthlr. $14 + x$ Monate, die 3000 rthlr. $8 + x$, und die 8000 rthlr. x Monate gestanden. Da nun, dem Uebereinkommen zu Folge, die 16000 rthlr. auf 15 Monate hätten verliehen werden sollen, so ist

$$16000 \cdot 15 = 5000\,(14+x) + 3000\,(8+x) + 8000x$$
folgl. $x = 9\frac{1}{8}$ Monate.

128.

Noch x Monate. Alsdann haben die 200 Stück $15 + x$ Monate, die 250 Stück $8 + x$ Monate, und die 150 Stück x Monate geweidet. Da nun, dem Contracte zu Folge, 400 Stück 16 Monate weiden sollen, so ist

$$400 \cdot 16 = 200\,(15 + x) + 250\,(8 + x) + 150x$$
folgl. $x = 2\frac{1}{3}$ Monate.

129.

Da der Käufer erst nach einem Jahre zu bezahlen nöthig hat, so tragen ihm die 4500 rthlr. in 12 Monaten $4500 \cdot 12$ rthlr. Interessen. Nimmt man nun an, daß die Zeit zwischen jeden zwei Terminen $= x$ sey, so behält der Käufer die ersten 750 rthlr. x Monate, die zweiten 2x, die dritten 3x, die vierten 4x Monate. Die Interessen hiervon betragen also $750x + 750 \cdot 2x + 750 \cdot 3x + 750 \cdot 4x = 750 \cdot 10x$. Es ist daher

$$4500 \cdot 12 = 750 \cdot 10x$$

folgl. $x = 7\frac{1}{5}$ Monate.

130.

Das ganze Kapital sey x. So konnte, nach der Aufgabe, der Schuldner 1376 rthlr. 5 Monate, 2560 rthlr. 8 Monate, und $x - 3936$ rthlr. 13 Monate benutzen, welches ihm $1376 \cdot 5 + 2560 \cdot 8 + (x - 3936) \cdot 13$ Interessen bringt. Nun soll er das ganze Kapital nach 10 Monaten bezahlen, dieses bringt ihm 10x Interessen, also $10x = 1376 \cdot 5 + 2560 \cdot 8 + (x - 3936) \cdot 13$

folgl. $x = 7936$ rthlr.

131.

Nach der Aufgabe kann der Schuldner von seiner Schuldmasse $2000 \cdot 3\frac{1}{2} + 3500 \cdot 4 + 1500 \cdot 14$ Interessen ziehen; gehet er aber den Vorschlag des Gläubigers ein, und ist der erste Termin nach x Monaten, und der zweite $x + 1$ Monate später, also nach $2x + 1$

Monaten, so ziehet er $3500x + 3500\,(2x + 1) = 3500\,(3x + 1)$ Interessen. Es ist daher

$$3500\,(3x + 1) = 2000 \cdot 3\tfrac{1}{2} + 3500 \cdot 4 + 1500 \cdot 14$$

$$\text{folgl. } x = 3\tfrac{2}{3}$$

132.

Es ist einleuchtend, daß ein Kapital von 100 rthlr. baar, welches jährlich n rthlr. trägt, nach m Jahren $100 + mn$ rthlr. werth ist. Mithin sind auch umgekehrt $100 + mn$ rthlr., welche erst nach m Jahren zahlbar sind, gegenwärtig baar nur 100 rthlr. werth. Sollen daher die 4340 rthlr., welche erst nach 8 Jahren zahlbar sind, sogleich baar mit 5 Procent Rabatt bezahlt werden, so muß man ansetzen: $100 + 8 \cdot 5 : 100 = 4340 : 3100$. Der erste Käufer bietet also an baarer Zahlung $3365 + 3100 = 6465$ rthlr. Nun habe der zweite Käufer x rthlr. geboten, wenn er nämlich das Kaufgeld in Terminalzahlungen, nach der Art, wie es in der Aufgabe festgesetzt ist, abtragen kann, und zwar $\frac{x}{3}$ nach zwei Jahren, ferner $\frac{x}{3}$ nach vier Jahren, und endlich $\frac{x}{3}$ nach sechs Jahren. Sollen nun die $\frac{x}{3}$ welche nach zwei Jahren zahlbar sind, sogleich baar mit 5 Procent Rabatt gezahlt werden, so setze man $110 : 100 = \frac{x}{3} : \frac{10x}{33}$. Um ferner zu berechnen, was die $\frac{x}{3}$ welche nach vier Jahren zahl=

bar sind, an baar mit 5 Procent Rabatt betragen, setze man $120 : 100 = \frac{x}{3} : \frac{5x}{18}$. Was endlich die $\frac{x}{3}$ welche nach sechs Jahren zahlbar sind, betrifft, so setze man, um den baaren Betrag zu erhalten, $130 : 100 = \frac{x}{3} : \frac{10x}{39}$ Da nun der Verkäufer beide Gebote für gleich erachtet, so ist

$$\frac{10x}{33} + \frac{5x}{18} + \frac{10x}{39} = 6465.$$

$$\text{folgl. } x = 7722$$

das Gebot des zweiten im Falle der Terminalzahlung.

133.

Der Gewinnst muß unter A, B, C, nach Verhältniß ihrer Einlagen multiplicirt mit der Zeit, welche jede Einlage gestanden hat, vertheilt werden. Da sich nun die Producte wie $8 \cdot 1200 : 10 \cdot 800 : 14 \cdot 600$, oder, indem man durchgehends durch 400 dividirt, wie $24 : 20 : 21$ verhalten, so sey der Theil des Gewinnstes, den A erhält, $= x$, folglich der Theil von B $= \frac{20x}{24} = \frac{5x}{6}$ und der Theil von C $= \frac{21x}{24} = \frac{7x}{8}$. Es ist daher

$$x + \frac{5x}{6} + \frac{7x}{8} = 50$$

folgl. $x = 18\frac{8}{13}$ für A
und hieraus $15\frac{11}{13}$ für B
$16\frac{7}{13}$ für C

134.

Die drei Theile, welche A, B, C vom Gewinnste g erhalten, müssen sich wie al : bm : cn verhalten. Wenn nun der Theil, den A erhält, = x ist, so ist der Theil von B = $\frac{bmx}{al}$, und der Theil von C = $\frac{cnx}{al}$. Es ist daher

$$x + \frac{bmx}{al} + \frac{cnx}{al} = g$$

$$\text{folgl. } x = \frac{alg}{al + bm + cn} \text{ für A}$$

mithin ist der Antheil von B $= \frac{bmx}{al} = \frac{bm \frac{alg}{al + bm + cn}}{al}$

$$= \frac{bmalg}{al\,(al + bm + cn)} = \frac{bmg}{al + bm + cn}$$

und der Antheil von C $= \frac{cnx}{al} = \frac{cn \frac{alg}{al + bm + cn}}{al}$

$$= \frac{cnalg}{al\,(al + bm + cn)} = \frac{cng}{al + bm + cn}$$

135.

Die verschiedenen Einlagen der drei Kaufleute verhalten sich wie 17 : 13 : 10. Nennt man also den Theil, den der dritte, mit Ausnahme der drei Procente, vom Gewinnste erhält, x, so erhält der zweite $\frac{13x}{10}$ und der erste $\frac{17x}{10}$. Da nun der dritte, außer

seinem verhältnißmäßigen Antheil x, noch 3 Procent dieses Antheils, das ist $\frac{3x}{100}$, mehr bekömmt, so ist

$$x + \frac{3x}{100} + \frac{13x}{10} + \frac{17x}{10} = 35262\tfrac{1}{2}$$

$$\text{folgl. } x = 8750$$

Addirt man zu dieser Zahl 3 Procent, das ist $262\frac{1}{2}$ hinzu, so ist der Antheil des dritten

$$= 9012\tfrac{1}{2}$$

Ferner findet man den Antheil des zweiten

$$= \frac{13x}{10} = \frac{13 \cdot 8750}{10} = 11375$$

und den Antheil des ersten

$$= \frac{17x}{10} = \frac{17 \cdot 8750}{10} = 14875$$

136.

Die Forderungen der drei Gläubiger verhalten sich wie 4 : 5 : 7. Nennt man daher den Theil, den der dritte, mit Ausnahme der 25 Procent, von der Verlassenschaft erhält, x, so ist der Antheil des zweiten, ebenfalls mit Ausnahme der 10 Procent, $= \frac{5x}{7}$ und ferner der Antheil des ersten $\frac{4x}{7}$. Da nun der dritte, außer seinem verhältnißmäßigen Theil x, noch 25 Procent dieses Theils, das ist $\frac{25x}{100} = \frac{x}{4}$ mehr bekömmt, so erhält der dritte überhaupt $x + \frac{x}{4}$. Der

zweite bekömmt außer dem ihm zukommenden Theil $\frac{5x}{7}$ noch 10 Procent dieses Theils, das ist $\frac{10 \cdot 5x}{100 \cdot 7} = \frac{x}{14}$, folglich erhält der zweite überhaupt $\frac{5x}{7} + \frac{x}{14}$. Es ist demnach

$$x + \frac{x}{4} + \frac{5x}{7} + \frac{x}{14} + \frac{4x}{7} = 3139$$

$$\text{folgl. } x = 1204$$

Addirt man zu dieser Summe 25 Procent, das ist 301 hinzu, so findet man den Antheil des dritten

$$= 1505$$

Ferner findet man den Antheil des zweiten

$$= \frac{5x}{7} + \frac{x}{14} = \frac{5 \cdot 1204}{7} + \frac{1204}{14} = 946$$

und den Antheil des ersten

$$= \frac{4x}{7} = \frac{4 \cdot 1204}{7} = 688$$

137.

Hier ist das Verhältniß der drei Forderungen $f : g : h$. Gesetzt also der dritte erhalte, mit Ausnahme der n Procent, den Theil x, so ist der Antheil des zweiten, ebenfalls mit Ausnahme der m Procent, $= \frac{gx}{h}$, und ferner der Antheil des ersten $= \frac{fx}{h}$. Da nun der dritte, außer seinem verhältnißmäßigen Theil x, noch n Procent dieses Theils, das ist $\frac{nx}{100}$, mehr be-

kömmt, so erhält der dritte überhaupt $x + \frac{nx}{100}$. Der zweite bekömmt, außer dem ihm zukommenden Theil $\frac{gx}{h}$, noch m Procent dieses Theils, das ist $\frac{mgx}{100h}$ mehr; folglich erhält der zweite überhaupt $\frac{gx}{h} + \frac{mgx}{100h}$. Es ist daher

$$x + \frac{nx}{100} + \frac{gx}{h} + \frac{mgx}{100h} + \frac{fx}{h} = a$$

$$\text{folgl. } x = \frac{100ah}{100\,(h+g+f)+gm+hn}$$

Addirt man zu dieser Größe n Procent, das ist

$$\frac{nx}{100} = \frac{n\,\frac{100ah}{100\,(h+g+f)+gm+hn}}{100}$$

$$= \frac{100ahn}{100[100(h+g+f)+gm+hn]} = \frac{ahn}{100(h+g+f)+gm+hn}$$

hinzu, so findet man den Antheil des dritten

$$\frac{100ah+ahn}{100(h+g+f)+gm+hn} = \frac{(100+n)\,ah}{100(h+g+f)+gm+hn}$$

Ferner findet man den Antheil des zweiten

$$= \frac{gx}{h} + \frac{mgx}{100h} = \frac{(100g+gm)\,x}{100h}$$

$$= \frac{(100g+gm)\,\frac{100ah}{100\,(h+g+f)+gm+hn}}{100h}$$

$$= \frac{100ah\,(100g+gm)}{100h[100(h+g+f)+gm+hn]} = \frac{(100+m)ag}{100(h+g+f)+gm+hn}$$

und den Antheil des ersten

$$= \frac{fx}{h} = \frac{f\frac{100ah}{100\,(h+g+f)+gm+hn}}{h}$$

$$= \frac{100afh}{h[100\,(h+f+g)+gm+hn]} = \frac{100af}{100\,(h+f+g)+gm+hn}$$

138.

Die Einlage des A sey $= x$

so ist die des B $= \frac{3x}{2}$

und die des C $= \frac{5x}{2} + 300$

Diese drei verschiedenen Einlagen verhalten sich wie $\frac{2x}{2} : \frac{3x}{2} : \frac{5x+600}{2}$ oder wie $2x : 3x : 5x + 600$. Nun theilt man aber eine Zahl nach einem gegebenen Verhältnisse, wenn man dieselbe durch die Summe aller Verhältnißzahlen dividirt, und den Quotienten nach und nach mit den einzelnen gegebenen Verhältnißzahlen multiplicirt. Auf diese Weise findet man den Antheil von C

$$= \frac{5020}{10x+600} \cdot (5x + 600).$$

Da nun, nach der Aufgabe, C für seinen Antheil 2570 rthlr. erhalten hat, so ist

$$\frac{5020}{10x+600} \cdot (5x + 600) = 2570$$

folgl. $x = 2450$ Einlage des A

und mithin 3675 „ „ B

6425 „ „ C

139.

Die Einlage des A sey = x, so ist die des B = x + 320, und nach der Aufgabe ist die Einlage des C = 5600. Multiplicirt man nun diese Einlagen mit ihrer Zeit, so erhält man die Verhältnißzahlen $7x : 14x + 4480 : 67200$ oder durch 7 dividirt $x : 2x + 640 : 9600$, nach welchen der Gewinnst von $2402\frac{1}{6}$ rthlr. unter A, B, C vertheilt werden muß. Dividirt man daher $2402\frac{1}{6}$ durch die Summe der Verhältnißzahlen, nämlich durch $3x + 10240$, und multiplicirt den Quotienten mit der Verhältnißzahl $2x + 640$, so erhält man für den Antheil des B $\frac{2402\frac{1}{6}}{3x + 10240} \cdot (2x + 640)$. Es ist daher

$$\frac{2402\frac{1}{6}}{3x + 10240} \cdot (2x + 640) = 879\frac{2}{3}$$

folgl. $x = 3450$ für A

und hieraus 3770 für B

140.

Die Zinsen von beiden Kapitalien mögen zu x Procent monatlich gerechnet worden seyn. Die Zinsen von 1100 rthlr. zu x Procent monatlich betragen in 10 Monaten 110x; mithin haben die vier Kinder überhaupt 1100 + 110x verzehrt. Es hat demnach ein Kind in 10 Monaten $\frac{1100 + 110x}{4}$ und folglich ein Kind in einem Monat $\frac{1100 + 110x}{40}$ verzehrt.

Die Zinsen von 1200 rthlr. zu x Procent monatlich betragen in 15 Monaten 180x; mithin haben die drei Kinder überhaupt 1200 + 180x verzehrt. Es hat daher ein Kind in 15 Monaten $\frac{1200 + 180x}{3}$ und folglich ein Kind in einem Monat $\frac{1200 + 180x}{45}$ verzehrt. Es ist also

$$\frac{1100 + 110x}{40} = \frac{1200 + 180x}{45}$$

folgl. $x = \frac{2}{3}$ Procent.

Demnach verzehrt ein Kind in einem Monat $\frac{1100+110x}{40}$ $= \frac{1100+110 \cdot \frac{2}{3}}{40} = \frac{1173\frac{1}{3}}{40} = \frac{3520}{120} = \frac{88}{3}$ und folgl. verzehren sechs Kinder in einem Monat $\frac{88 \cdot 6}{3} =$ 176 rthlr. Setzt man daher, um die zweite Frage dieser Aufgabe zu beantworten, die gesuchte Anzahl der Monate = x, so haben die sechs Kinder in x Monaten 176x rthlr. verzehrt. Nun betragen die Zinsen von 1650 rthlr., zu $\frac{2}{3}$ Procent monatlich, in x Monaten 11x rthlr. Es ist daher

$$1650 + 11x = 176x$$

folgl. x = 10 Monate.

141.

Beide Kapitalien mögen x Procent monatliche Zinsen getragen haben. Es hat daher das Kapital von 4800 in 9 Monaten 432x rthlr. getragen (denn es

ist $100 : 9x = 4800 : 432x$), und ein jeder von den fünf Brüdern hat demnach in 9 Monaten $\frac{4800+432x}{5}$ und in einem Monat $\frac{4800 + 432x}{45}$ rthlr. verzehrt. Ferner trägt das Kapital von 3320 rthlr. in 16 Monaten $531\frac{1}{5}$ rthlr. (denn $100 : 16x = 3320 : 531\frac{1}{5}x$) und eine jede von den zwei Personen hat demnach in 16 Monaten $\frac{3320+531\frac{1}{5}x}{2}$ und in einem Monat $\frac{3320+531\frac{1}{5}x}{32}$ rthlr. verzehrt. Es ist daher

$$\frac{4800+432x}{45} = \frac{3320+531\frac{1}{5}x}{32}$$

$$\text{folgl. } x = \frac{5}{12}$$

Hieraus ergiebt sich nun das, was ein jeder monatlich verzehrt hat,

$$= \frac{4800+432 \cdot \frac{5}{12}}{45} = 110\frac{2}{3}$$

142.

Die Livree mag zu x rthlr. gerechnet seyn, so ist der jährliche Lohn $= 40 + x$, dieses macht auf einen Monat $\frac{40+x}{12}$ und folgl. auf fünf Monate $\frac{5(40+3)}{12}$. Es ist daher nach der Aufgabe

$$\frac{5(40+x)}{12} = x + 6\frac{1}{6}$$

folgl. $x = 18$ rthlr.

143.

Der Scheffel Roggen mag zu x rthlr. angerechnet worden seyn. Der eine Tagelöhner erhält also für 56 Tage 14 + 4x, und folglich für einen Tag $\frac{14 + 4x}{56}$. Der andere Tagelöhner erhält für 84 Tage $17\frac{1}{4} + 7\frac{1}{2}x$, folglich für einen Tag $\frac{17\frac{1}{4} + 7\frac{1}{2}x}{84}$. Es ist daher

$$\frac{14 + 4x}{56} = \frac{17\frac{1}{4} + 7\frac{1}{2}x}{84} = \frac{69 + 30x}{336}$$

folgl. $x = 2\frac{1}{2}$ rthlr.

144.

Der Friedrichsd'or sey zu x rthlr. gerechnet, so hat er einmal für 7 Monate $16\frac{11}{12} + 7x$ rthlr. und folglich für einen Monat $\frac{16\frac{11}{12} + 7x}{7}$ erhalten; ein anderes Mal hat er für 9 Monate $44\frac{1}{12} + 5x$, und folglich für einen Monat $\frac{44\frac{1}{12} + 5x}{9}$ erhalten. Es ist daher

$$\frac{16\frac{11}{12} + 7x}{7} = \frac{44\frac{1}{12} + 5x}{9}$$

oder $152\frac{1}{4} + 63x = 301\frac{7}{12} + 35x$

folgl. $x = 5\frac{7}{12}$ rthlr.

145.

Er habe x Tage für seinen Meister, und folglich 50 — x Tage für einen andern gearbeitet, er erhält also vom Meister 8x gr. und muß dem Meister geben

(50 — x) 5 gr. Da er nun noch $9\frac{1}{12}$ rthlr. = 218 gr. bezahlt erhält, so ist

$$8x - (50 - x) 5 = 218$$

folgl. x = 36 Tage.

146.

Er habe anfänglich x Eier gehabt, woraus er 7x pf. gelöst hätte. Nachdem aber 5 davon zerbrochen wurden, blieben ihm noch x — 5 übrig, und diese verkauft er zu 8 pf. das Stück, folglich löset er daraus (x — 5) 8. Es ist daher

$$(x - 5) 8 = 7x$$

folgl. x = 40 Stück Eier.

147.

Er habe x Stück Citronen gekauft, welche ihm $1\frac{1}{2}x$ gr. gekostet haben. Hätte er aber für dasselbe Geld noch 5 Stück mehr erhalten, so würde er x + 5 Stück gehabt haben. Da ihm nun alsdann, nach der Aufgabe, das Dutzend nur $15\frac{1}{2}$ gr., also das Stück $\frac{31}{24}$ gr. gekostet hätte, so ist

$$\frac{31}{24}(x + 5) = 1\frac{1}{2}x$$

folgl. x = 31 Stück.

148.

Das Stück Tuch mag, nach der Angabe des Verkäufers, x Ellen enthalten sollen, wofür also der Käufer $2\frac{1}{2}x$ rthlr. bezahlt hat. Nun findet sich, daß das Stück 5 Ellen mehr, also x + 5 enthält, und daß er

die Elle wieder für 2 rthlr. und folglich das ganze Stück für 2 (x + 5) rthlr. verkaufen muß. Da er nun bei diesem Handel $13\frac{1}{3}$ Procent verliert, so muß der Einkaufswerth sich zum Verkaufswerth wie 100 zu $86\frac{2}{3}$ verhalten. Man hat also

$$100 : 86\tfrac{2}{3} = 2\tfrac{1}{2}x : 2\,(x+5)$$

und daher $200x + 1000 = \frac{650x}{3}$

folgl. x = 60 Ellen nach der Angabe ꝛc.

149.

Der Gehalt sey = x; davon wird $\frac{1}{7}$ zum Theater verwendet, folglich bleibt $\frac{6x}{7}$. Wird aber der Gehalt um 100 rthlr. vermehrt, und davon $\frac{1}{5}$ zum Theater verwendet, so bleibt $\frac{4(x+100)}{5}$. Nun ist, nach der Aufgabe, der letztere Rest um 40 rthlr. mehr als der erstere; es ist daher

$$\frac{4(x+100)}{5} = \frac{6x}{7} + 40$$

folgl. x = 700 rthlr.

150.

Hier soll nur das Verhältniß beider Gehalte, nicht aber die Größe der Gehalte selbst angegeben werden. Es sey daher der Gehalt vor der Zulage = x und nach derselben = y. Von x verwendet er $\frac{1}{4}$ zu Büchern, es bleiben ihm also noch $\frac{3x}{4}$, und von

y verwendet er $\frac{1}{3}$ zu demselben Behufe, es bleiben ihm also noch $\frac{2y}{3}$. Es ist daher, nach der Aufgabe, $\frac{3x}{4} = \frac{2y}{3}$, und hieraus läßt sich folgende Proportion entwickeln

$$x : y = \tfrac{2}{3} : \tfrac{3}{4} = 8 : 9$$

Die Gehaltszulage beträgt also $\frac{1}{8}$ des vorigen Gehalts x.

151.

Auch hier verlangt man nur das Verhältniß beider Miethen, nicht aber die Miethen selbst zu wissen. Es sey daher der Miethzins vor der Steigerung $= x$ und nach derselben $= y$. Von x mußte der Wirth $\frac{1}{7}$ contribuiren, es blieb ihm also $\frac{6x}{7}$ übrig; von y muß er $\frac{1}{6}$ contribuiren, es bleibt ihm also noch $\frac{5y}{6}$. Es ist daher, nach der Aufgabe, $\frac{6x}{7} = \frac{5y}{6}$, und hieraus läßt sich folgende Proportion ableiten

$$x : y = \tfrac{5}{6} : \tfrac{6}{7} = 35 : 36$$

Der bisherige Miethzins muß daher um $\frac{1}{35}$ gesteigert werden.

152.

Die Summe Geldes mag anfänglich x rthlr. betragen haben. Nimmt man hiervon $\frac{1}{3}$ weg und legt 50 rthlr. zu, so erhält man $\frac{2x}{3} + 50$. Hiervon $\frac{1}{4}$ weg-

genommen und 70 zugelegt, giebt $\frac{3\left(\frac{2x}{3}+50\right)}{4}+70$; und dies soll, nach der Aufgabe, 120 rthlr. betragen. Es ist daher

$$\frac{3\left(\frac{2x}{3}+50\right)}{4}+70=120$$

oder $\frac{2x+150}{4}+70=120$

folgl. $x = 25$ rthlr.

153.

Die Summe sey anfänglich $= x$. Hiervon wird die Hälfte und 50 rthlr. weggenommen, es bleibt also $\frac{x}{2}-50=\frac{x-100}{2}$ übrig. Hiervon wird ferner der fünfte Theil und 30 rthlr. weggenommen, es bleibt also $\frac{4\cdot\frac{x-100}{2}}{5}-30=\frac{4x-400-300}{10}=\frac{4x-700}{10}$. Hiervon wird abermals der vierte Theil und 20 rthlr. weggenommen, es bleibt also $\frac{3\cdot\frac{4x-700}{10}}{4}-20=\frac{6x-1050-400}{20}=\frac{6x-1450}{20}$. Es ist daher, nach der Aufgabe,

$$\frac{6x-1450}{20}=10$$

folgl. $x = 275$ rthlr.

154.

Das Legat betrage x rthlr. Der Kammerdiener erhält 200 rthlr. $+ \frac{x - 200}{2} = \frac{x + 200}{2}$. Der Koch bekömmt $\frac{x - \frac{x + 200}{2}}{5} + 400 = \frac{x + 3800}{10}$. Es ist demnach

$$\frac{x + 200}{2} + \frac{x + 3800}{10} + 520 = x$$

folgl. x = 2500 rthlr.

155.

Er habe x Eier nach der Stadt gebracht. Hiervon verkauft er $\frac{x}{2} + 4$, es bleiben also noch $\frac{x}{2} - 4$. Nun verkauft er die Hälfte, das ist $\frac{x}{4} - 2$, und noch 2 darüber, oder überhaupt $\frac{x}{4} - 2 + 2 = \frac{x}{4}$; dieses von $\frac{x}{2} - 4$ abgezogen, bleiben ihm noch $\frac{x}{4} - 4$. Hiervon muß ferner, nach der Aufgabe, $\frac{x}{8} - 2 + 6 = \frac{x}{8} + 4$, welche Anzahl Eier ihm gestohlen worden, abgezogen werden, so bleiben $\frac{x}{8} - 8$. Es ist daher

$$\frac{x}{8} - 8 = 2$$

folgl. x = 80 Eier.

156.

Das Vermögen mag anfänglich x rthlr. betragen haben. Nach Verlauf des ersten Jahres wird es um $\frac{1}{3}$ vermehrt und 1000 rthlr. davon genommen; das Vermögen ist also am Ende des ersten Jahres $= \frac{4x}{3} - 1000 = \frac{4x - 3000}{3}$. Dieses um $\frac{1}{3}$ vermehrt, giebt $\frac{4x - 3000}{3} + \frac{4x - 3000}{9} = \frac{12x - 9000 + 4x - 3000}{9} = \frac{16x - 12000}{9}$. Hiervon 1000 weggenommen, bleiben am Ende des zweiten Jahres $\frac{16x - 12000}{9} - 1000 = \frac{16x - 12000 - 9000}{9} = \frac{16x - 21000}{9}$. Diesen Rest abermals um $\frac{1}{3}$ vermehrt, giebt $\frac{16x - 21000}{9} + \frac{16x - 21000}{27} = \frac{48x - 63000 + 16x - 21000}{27} = \frac{64x - 84000}{27}$. Hiervon 1000 rthlr. weggenommen, bleiben am Ende des dritten Jahrs $\frac{64x - 84000}{27} - 1000 = \frac{64x - 84000 - 27000}{27} = \frac{64x - 111000}{27}$. Es ist daher

$$\frac{64x - 111000}{27} = 2x$$

folgl. $x = 11100$ rthlr.

157.

Das anfängliche Vermögen mag = x seyn. Nach Verlauf des ersten Jahres vermehrt er selbiges um 20 Procent, das heißt um $\frac{1}{5}x$, und nimmt 1000 rthlr. davon weg; es bleibt also am Ende des ersten Jahres $\frac{6x}{5} - 1000 = \frac{6x - 5000}{5}$. Dieses um $\frac{1}{5}$ vermehrt, giebt $\frac{6x-5000}{5} + \frac{6x-5000}{25} = \frac{30x-25000+6x-5000}{25}$ $= \frac{36x-30000}{25}$. Hiervon 1000 abgezogen, bleibt am Ende des zweiten Jahres $\frac{36x-30000}{25} - 1000$ $= \frac{36x-30000-25000}{25} = \frac{36x-55000}{25}$. Diesen Rest abermals um $\frac{1}{5}$ vermehrt, giebt $\frac{36x-55000}{25}$ $+ \frac{36x-55000}{125} = \frac{180x-275000+36x-55000}{125}$ $= \frac{216x-330000}{125}$. Hiervon 1000 abgezogen, bleibt am Ende des dritten Jahres $\frac{216x-330000}{125} - 1000$ $= \frac{216x-330000-125000}{125} = \frac{216x-455000}{125}$. Dieser Rest soll nun, nach der Aufgabe, nicht allein $\frac{3}{5}$, sondern noch 200 rthlr. mehr betragen als sein anfängliches Vermögen. Es ist daher

$$\frac{216x-455000}{125} = x + \frac{3x}{5} + 200$$

folgl. $x = 30000$

158.

Er habe x Aepfel nach Hause gebracht. Davon erhält der älteste Sohn $\frac{x}{2} - 8$, es bleibt also $\frac{x}{2} + 8$. Hierauf nimmt der zweite $\frac{x}{4} + 4 - 8 = \frac{x}{4} - 4$, es bleibt also $\frac{x}{4} + 12$. Der dritte nimmt hiervon $\frac{x}{8} + 6 - 8 = \frac{x}{8} - 2$, es bleibt daher $\frac{x}{8} + 14$. Endlich nimmt der vierte hiervon $\frac{x}{16} + 7 - 8 = \frac{x}{16} - 1$, es bleiben demnach für den fünften $\frac{x}{16} + 15$. Es ist daher

$$\frac{x}{16} + 15 = 20$$

folgl. $x = 80$

159.

Die Zahl sey x, so ist

$$2\tfrac{1}{2}\,(3\tfrac{3}{7}x - 60) - 30 = 0$$

folgl. $x = 21$

160.

Er habe anfänglich x rthlr. gehabt. Diese tragen zu 4 Procent in 2 Jahren $\frac{2x}{25}$ rthlr. Interessen; denn es ist $100 : 8 = x : \frac{2x}{25}$. Nimmt er nun $\frac{1}{4}$ vom Kapital hinweg, so bleibt $\frac{3x}{4}$, und diese tragen in einem

Jahre $\frac{3x}{100}$ Interessen; denn es ist $100 : 4 = \frac{3x}{4} : \frac{3x}{100}$; folglich trägt die letztere Summe in 7 Monat $\frac{7 \cdot 3x}{12 \cdot 100} = \frac{7x}{400}$; denn es ist $12 : \frac{3x}{100} = 7 : \frac{7 \cdot 3x}{12 \cdot 100}$. Nimmt er endlich abermals von $\frac{3x}{4}$ ein Viertel hinweg, so bleibt $\frac{3 \cdot 3x}{4 \cdot 4} = \frac{9x}{16}$, und diese tragen in einem Jahre $\frac{9x}{16 \cdot 25}$, folglich in 13 Monat $\frac{13 \cdot 9x}{12 \cdot 16 \cdot 25} = \frac{39x}{1600}$. Die sämmtlichen Interessen betragen also $\frac{2x}{25} + \frac{7x}{400} + \frac{39x}{1600}$. Es ist daher

$$\frac{2x}{25} + \frac{7x}{400} + \frac{39x}{1600} = 6093\tfrac{3}{4}$$
$$\text{folgl. } x = 50000.$$

161.

Das hinterlassene Vermögen sey $= x$, so bekömmt das erste Kind 100 rthlr. und noch vom Reste $x - 100$ den zehnten Theil; der Antheil des ersten ist demnach $\frac{x - 100}{10} + 100 = \frac{x - 100 + 1000}{10} = \frac{x + 900}{10}$. Nun ziehe man den Antheil des ersten von x ab, so bleibt $x - \frac{x + 900}{10} = \frac{10x - x - 900}{10} = \frac{9x - 900}{10}$. Hiervon bekömmt das zweite Kind 200 rthlr. und $\frac{1}{10}$

des Restes, das ist: $200 + \frac{\frac{9x - 900}{10} - 200}{10}$
$= \frac{9x - 900 - 2000}{100} + 200 = \frac{9x - 900 - 2000 + 20000}{100}$
$= \frac{9x + 17100}{100}$. Da nun, nach der Aufgabe, alle Kinder gleich viel bekommen, so ist

$$\frac{x + 900}{10} = \frac{9x + 17100}{100}$$

folgl. $x = 8100$ rthlr.

Substituirt man diesen Werth für x in $\frac{x + 900}{10}$, so erhält man den Antheil des ersten $= \frac{8100 + 900}{10}$ $= 900 =$ dem Antheil eines jeden Kindes. Die Anzahl der Kinder ist daher $\frac{8100}{900} = 9$.

162.

Das hinterlassene Vermögen sey x, so bekömmt das erste Kind 30 rthlr. und noch den neunten Theil des Restes $x - 30$; der Antheil des ersten ist demnach $\frac{x - 30}{9} + 30 = \frac{x - 30 + 270}{9} = \frac{x + 240}{9}$. Ziehet man den Antheil des ersten von x ab, so bleibt $x - \frac{x + 240}{9} = \frac{9x - x - 240}{9} = \frac{8x - 240}{9}$. Hiervon bekömmt das zweite Kind 60 rthlr. und $\frac{1}{9}$ des Restes, das ist: $60 + \frac{\frac{8x - 240}{9} - 60}{9} = 60 +$

$$\frac{8x-240-540}{81}=\frac{8x-240-540+4860}{81}=\frac{8x+4080}{81}.$$

Da nun, nach der Aufgabe, alle Kinder gleich viel erhalten, so ist

$$\frac{x+240}{9}=\frac{8x+4080}{81}$$

folgl. $x = 1920$.

Substituirt man diesen Werth für x in $\frac{x+240}{9}$, so erhält man den Antheil des ersten $= \frac{1920+240}{9}$ $= 240 =$ dem Antheil eines jeden Kindes. Die Anzahl der Kinder ist daher $\frac{1920}{240} = 8$.

163.

Das hinterlassene Vermögen sey $= x$, so bekömmt das erste Kind a und noch vom Reste $x - a$ den nten Theil. Der Antheil des ersten ist demnach $\frac{x-a}{n} + a$ $= \frac{x-a+an}{n}$. Nun ziehe man den Antheil des ersten von x ab, so bleibt $x - \frac{x-a+an}{n} = \frac{nx-x+a-an}{n}$ Hiervon bekömmt das zweite Kind 2a und $\frac{1}{n}$ des Restes, das ist: $2a + \frac{\frac{nx-x+a-an}{n} - 2a}{n}$ $= \frac{nx-x+a-3an}{n^2} + 2a = \frac{nx-x+a-3an+2an^2}{n^2}.$

Es ist demnach

$$\frac{x - a + an}{n} = \frac{nx - x + a - 3an + 2an^2}{n^2}$$

folgl. $x = an^2 - 2an + a = a(n^2 - 2n + 1) = a(n-1)^2$

Substituirt man diesen Werth für x in $\frac{x - a + an}{n}$, so erhält man den Antheil eines jeden Kindes

$$= \frac{a(n-1)^2 - a + an}{n} = \frac{an^2 - 2an + a - a + an}{n} =$$

$\frac{an^2 - an}{n} = \frac{an(n-1)}{n} = a(n-1)$. Die Anzahl der Kinder ist daher $\frac{a(n-1)^2}{a(n-1)} = n - 1$.

164.

Man nehme an, der General habe beim ersten mal x Mann zur Seite des Quadrats gewählt. Die Anzahl der Mannschaft, welche in einem solchen Quadrate gestellt werden kann, ist $= x^2$. Da ihm aber bei dieser Stellung 39 Mann übrig bleiben, so muß das ganze Regiment $x^2 + 39$ Mann stark seyn. Wählt er ferner zur Seite seines Quadrats $x + 1$ Mann, so ist die Anzahl der Mannschaft, welche in einem solchen Quadrate gestellt werden kann, $= (x+1)^2$. Da ihm aber alsdann 50 Mann zur Ergänzung des Quadrats fehlen, so muß das ganze Regiment $(x + 1)^2 - 50$ Mann stark seyn. Es ist demnach

$$x^2 + 39 = (x + 1)^2 - 50$$

folgl. $x = 44$ Mann,

welche er anfänglich zur Seite seines Quadrats wählte. Hieraus ergiebt sich die ganze Stärke des Regiments

$$= 44^2 + 39 = 1975 \text{ Mann}.$$

165.

Die Anzahl der Thaler, welche er zuerst in eine Reihe legt, mögen $= x$ seyn. Die Anzahl der Thaler, welche in einem solchen Quadrate gelegt werden können, ist $= x^2$. Da ihm nun in diesem Falle 130 rthlr. übrig bleiben, so ist die gesuchte Anzahl Thaler $= x^2 + 130$. Macht er ferner $x + 3$ zur Seite eines Quadrats, so ist die Anzahl Thaler, welche zu diesem Quadrate gebraucht werden, $= (x + 3)^2$; da ihm aber alsdann nur 31 rthlr. übrig bleiben, so sind sämmtliche Thaler $= (x + 3)^2 + 31$. Es ist demnach

$$(x + 3)^2 + 31 = x^2 + 130$$

$$\text{folgl. } x = 15 \text{ Thaler},$$

welche er anfänglich zur Seite seines Quadrats wählte. Hieraus erhält man die gesuchte Anzahl Thaler

$$= 15^2 + 130 = 355.$$

166.

Die zu suchende Zahl sey x, so ist

$$(a + x)^2 - (b + x)^2 = d$$

$$\text{oder } a^2 + 2ax + x^2 - b^2 - 2bx - x^2 = d$$

$$\text{folgl. } x = \frac{d - a^2 + b^2}{2(a - b)}$$

167.

Das erste Faß enthalte x Quart. Nun kann das erste Faß nur $\frac{7}{9}$ des zweiten Fasses in sich aufnehmen; folglich enthält das zweite Faß 9 solcher Theile, deren das erste nur 7 aufnehmen kann. Das zweite Faß enthält demnach $\frac{9x}{7}$. Ferner kann das zweite Faß nur $\frac{3}{4}$ des dritten Fasses in sich aufnehmen; folglich enthält das dritte Faß 4 solcher Theile, davon das zweite nur 3 enthält. Das dritte Faß enthält demnach $\frac{4}{3} \cdot \frac{9x}{7} = \frac{12x}{7}$. Da nun zur Füllung des dritten Fasses aus dem ersten Fasse noch 50 Quart fehlen, so giebt auch $x + 50$ die Anzahl Quarte des dritten Fasses an. Es ist demnach

$$\frac{12x}{7} = x + 50$$

folgl. $x = 70$ Quart für das erste Faß
und hieraus 90 Quart für das zweite Faß
und 120 Quart für das dritte Faß.

168.

Das erste Faß enthalte x Quart. Nun kann das zweite Faß nur $\frac{3}{7}$ des ersten Fasses in sich aufnehmen, das zweite Faß enthält also $\frac{3x}{7}$. Ferner enthält das dritte Faß $\frac{3}{4}$ des zweiten Fasses $= \frac{3}{4} \cdot \frac{3x}{7} = \frac{9x}{28}$. Das vierte Faß enthält, da nur $\frac{9}{16}$ desselben aus dem

dritten Fasse gefüllt werden kann, 7 solcher Theile mehr, deren das dritte 9 enthält, das heißt: es enthält $\frac{16}{9} \cdot \frac{9x}{28} = \frac{4x}{7}$. Da nun das dritte und vierte Faß zusammen $\frac{9x}{28} + \frac{4x}{7} = \frac{25x}{28}$ enthalten, und diese beide Fässer, nach der Aufgabe, zusammen das erste Faß weniger 15 Quart aufnehmen können, so ist

$$\frac{25x}{28} = x - 15$$

folgl.	x = 140	Quart	für das erste Faß
und hieraus	60	„	für das zweite
	45	„	für das dritte
	80	„	für das vierte.

VII.

Auflösung der Aufgaben für die Gleichungen des ersten Grades mit mehreren unbekannten Größen.

(Zu M. Hirsch Sammlung von Beispielen rc. XVI. Kapitel, von S. 204 bis 224.)

1.

Die beiden Zahlen mögen x und y seyn, so ist

$$x + y = 70$$

$$\text{und } x - y = 16$$

$$\text{folgl. } x = \frac{70 + 16}{2} = 43, \text{ und } y = \frac{70 - 16}{2} = 27$$

2.

$$\text{Hier ist } x + y = a$$

$$\text{und } x - y = b$$

$$\text{folgl. } x = \frac{a + b}{2}, \text{ und } y = \frac{a - b}{2}$$

3.

In einem Geldbeutel mag x und im andern y rthlr. enthalten seyn, so ist

$$x + y = 300$$

und $x - 30 = y + 30$

oder $x - y = 60$

folgl. $x = \frac{300 + 60}{2} = 180$ rthlr.

und $y = \frac{300 - 60}{2} = 120$ rthlr.

4.

A habe x und B y rthlr., so ist

$x + 100 = y - 100$

oder I. $x - y = -200$

Ferner ist $y + 100 = 2(x - 100) = 2x - 200$

oder II. $y - 2x = -300$

Addirt man (I.) und (II.), so findet man

$-x = -500$ oder $x = 500$ rthlr.

Multiplicirt man (I.) mit 2, welches

III. $2x - 2y = -400$

giebt, und addirt (II.) und (III.), so ist

$-y = -700$ oder $y = 700$ rthlr.

5.

Eine von beiden Tabatieren sey x rthlr. und die andere y rthlr. werth, so ist

$x + 8 = \frac{y}{2}$ oder I. $x - \frac{y}{2} = -8$

Ferner ist $y + 8 = 3x$ oder II. $y - 3x = -8$

Multiplicirt man (I.) mit 3 und addirt (II.) hinzu, so ist

$-\frac{y}{2} = -32$, folgl. $y = 64$ rthlr.

Diesen Werth von y in (II.) substituirt, giebt

$$x = 24 \text{ rthlr.}$$

6.

A besitze x rthlr. und B y rthlr., so ist

$$\text{I. } x + y = 570$$

$$\text{und II. } 3x + 5y = 2350$$

Die Gleichung (I.) mit 3 multiplicirt und von (II.) abgezogen, giebt

$$2y = 640, \text{ folgl. } y = 320 \text{ rthlr.}$$

Diesen Werth für y in (I.) substituirt, giebt

$$x = 250 \text{ rthlr.}$$

7.

Die beiden Zahlen mögen x und y seyn, so ist

$$\text{I. } 2x + 5y = 31$$

$$\text{und II. } 7x + 4y = 68$$

$$\text{Aus (I.) erhält man } x = \frac{31 - 5y}{2}$$

Diesen Werth in (II.) substituirt, giebt

$$7 \cdot \frac{31 - 5y}{2} + 4y = 68$$

$$\text{folgl. } y = 3$$

$$\text{und } x = \frac{31 - 5 \cdot 3}{2} = 8$$

8.

Die Zahlen seyen abermals x und y, so ist

$$\text{I. } ax + by = k$$

$$\text{II. } a'x + b'y = k'$$

Aus (I.) ergiebt sich $x = \frac{k - by}{a}$

Substituirt man diesen Werth in (II.), so erhält man

$$a' \frac{k - by}{a} + b'y = k'$$

oder $a'k - a'by + ab'y = ak'$

folgl. $y = \frac{ak' - a'k}{ab' - a'b}$ rc.

9.

Die Zahlen seyen x und y. Es ist also

$x + 4 = \frac{13y}{4}$ oder I. $4x - 13y = -16$

und $y + 8 = \frac{x}{2}$ oder II. $2y - x = -16$

Multiplicirt man (II.) mit 4 und addirt (I.) hinzu, so ist

$$-5y = -80, \text{ folgl. } y = 16$$

Diesen Werth in (II.) substituirt, giebt

$$x = 48$$

10.

Die Zahlen seyen x und y. Es ist daher

$x + a = my$ oder I. $x - my = -a$

und $y + b = nx$ oder II. $y - nx = -b$

Multiplicirt man (I.) mit n und addirt (II.) hinzu, so ist

$$y - mny = -an - b$$

oder $(mn - 1)\, y = an + b$

folgl. $y = \frac{an + b}{mn - 1}$

Multiplicirt man (II.) mit m und addirt (I.) hinzu, so findet man auf eine ähnliche Art

$$x = \frac{a + bm}{mn - 1}$$

11.

Der Vater sey x und der Sohn y Jahr alt, so war vor 6 Jahren der Vater $x - 6$ und der Sohn $y - 6$ Jahr alt gewesen. Es ist daher

$$x - 6 = 3\,(y - 6) + \frac{y - 6}{3}$$

oder $3\,(x - 6) = 9\,(y - 6) + y - 6 = 10\,(y - 6)$

oder I. $3x - 10y = 18 - 60 = -42$

Ferner ist $x + 3 = (y + 3)\,2\tfrac{1}{6} = \frac{13y}{6} + \frac{13}{2}$

oder II. $x - \frac{13y}{6} = \frac{13}{2} - 3 = \frac{7}{2}$

Multiplicirt man (II.) mit 3, welches

III. $3x - \frac{13y}{2} = \frac{21}{2}$

giebt, und subtrahirt (III.) von (I.), so bleibt

$$-\frac{7y}{2} = -\frac{105}{2} \text{ oder } 7y = 105$$

folgl. $y = 15$ Jahr, das Alter des Sohnes
und hieraus $x = 36$ Jahr, das Alter des Vaters.

12.

A war x und B y rthlr. reich, so ist

I. $x + y = 9800$

ferner ist $\frac{5x}{6} = \frac{4y}{5}$ oder $25x = 24y$

oder II. $25x - 24y = 0$

Multiplicirt man (I.) mit 25, welches

$25x + 25y = 245000$

giebt, und ziehet hiervon (II.) ab, so bleibt

$49y = 245000$

folgl. $y = 5000$

und hieraus $x = 4800$

13.

Das Vermögen des A sey $= x$ und das des $B = y$,

so ist $x + \frac{y}{8} = 1200$ oder I. $8x + y = 9600$

und $y + \frac{x}{6} = 2550$ oder II. $6y + x = 15300$

Multiplicirt man (II.) mit 8 und ziehet (I.) davon ab, so bleibt $47y = 112800$

folgl. $y = 2400$ rthlr. das Vermögen des B

und hieraus $x = 900$ rthlr. das Vermögen des A

14.

Die Procente, wofür er Geld aufgenommen hat, seyen $= x$, und die, wofür er verliehen hat, $= y$, so ist

$100 : x = 8000 : 80x$

und $100 : y = 23000 : 230y$

also I. $230y = 80x + 905$

Ferner ist $100 : x = 9400 : 94x$

und $100 : y = 17500 : 175y$

also II. $175y = 94x + 539\frac{1}{2}$

Aus den Gleichungen (I.) und (II.) ergiebt sich

$$y = \frac{80x + 905}{230} = \frac{94x + 539\frac{1}{2}}{175}$$

oder $2800x + 31675 = 4324x + 24817$

folgl. $x = 4\frac{1}{2}$ Procent rc.

15.

Das eine Stück Eisen wiege x Pfund, das andere y Pfund, so ist

$$\frac{2x}{5} + 96 = \frac{3y}{4} \text{ oder I. } 8x - 15y = -1920$$

$$\text{ferner } \frac{5y}{8} = \frac{4x}{9} \text{ oder II. } 45y - 32x = 0$$

Multiplicirt man (I.) mit 4 und addirt (II.) hinzu, so ist

$$-15y = -7680$$

folgl. $y = 512$ Pf. Gewicht des ersten Stücks
und hieraus $x = 720$ Pf. Gewicht des zweiten Stücks.

16.

Die erste Oeffnung gebe x und die zweite y Eimer in einer Stunde, so ist

$$\text{I. } 4x + 5y = 90$$

$$\text{II. } 7x + 3\tfrac{1}{2}y = 126$$

Multiplicirt man (I.) mit 7 und (II.) mit 4, so erhält man die Gleichungen

$$\text{III. } 28x + 35y = 630$$

$$\text{IV. } 28x + 14y = 504$$

Subtrahirt man (IV.) von (III.), so bleibt

$$21y = 126$$

folgl. $y = 6$ Eimer in einer Stunde

und hieraus $x = 15$ Eimer in einer Stunde.

Es laufen also durch beide Oeffnungen zusammen in einer Stunde $15 + 6 = 21$ Eimer. Da nun der Wasserbehälter 210 Eimer aufnehmen kann, so wird er, wenn das Wasser durch beide Oeffnungen zugleich fließt, in 10 Stunden gefüllt.

17.

Er habe x Siebzehner und y Siebener, so ist

I. $x + y = 500$

und II. $17x + 7y = 112$ Fl. 40 Kr. $= 6760$ Kr.

Multiplicirt man (I.) mit 7 und ziehet diese Gleichung von (II.) ab, so bleibt

$$10x = 3260$$

folgl. $x = 326$ Siebzehner

und hieraus $y = 174$ Siebener.

18.

Das Pfund von der ersten Waare koste x gr. und von der zweiten y gr., so ist

I. $8x + 19y = 437$

Ferner $20x + 16y = 620$

oder II. $5x + 4y = 155$

Multiplicirt man (I.) mit 5 und (II.) mit 8, so erhält man

III. $40x + 95y = 2185$

IV. $40x + 32y = 1240$

Subtrahirt man (IV.) von (III.), so bleibt

$$63y = 945$$

folgl. $y = 15$ gr. Preis eines Pfundes von der ersten Waare,

und also $x = 19$ gr. Preis eines Pfundes von der zweiten Waare.

19.

Eine Schlesische Elle mag $= x$ Brab. Ellen, und eine Leipziger mag $= y$ Brab. Ellen seyn, so sind 15 Schlesische $= 15x$ Brab. und 33 Leipz. $= 33y$ Brab. ꝛc. Es ist also

I. $15x + 33y = 39\frac{1}{2}$ Brab. Ellen

II. $24x + 55y = 65$ Brab. Ellen.

Multiplicirt man (I.) mit 8 und (II.) mit 5, subtrahirt die Gleichungen von einander, und bestimmt y, so erhält man

$y = \frac{9}{11}$ Brab. Ellen.

Es verhält sich also die Leipziger Elle zur Brabanter Elle wie 9 : 11.

Substituirt man den Werth von y in (I.), so erhält man

$x = \frac{5}{6}$ Brab. Ellen.

Folglich verhält sich die Schlesische Elle zur Brabanter Elle wie 5 : 6.

Nun ist

Leipz. : Brab. $= 9 : 11$

Brab. : Schles. $= 6 : 5$

folgl. Leipz. : Schles. $= 6 \cdot 9 : 11 \cdot 5 = 54 : 55$

Da nun endlich

$$54 : 55 = 100 : 101\tfrac{23}{27}$$

so ist die Schlesische Elle um $1\tfrac{23}{27}$ Procent größer als die Leipziger Elle.

20.

Ein Danziger Fuß sey $= x$ Rheinl. und ein Berliner $= y$ Rheinl., so sind $17\tfrac{1}{2}$ Danziger $= 17\tfrac{1}{2}x$ Rheinl. und 19 Berl. $= 19y$ Rheinl. Es ist daher

$$\text{I. } 17\tfrac{1}{2}x + 19y = 34\tfrac{3}{4} \text{ Rheinl. Fuß}$$

$$\text{II. } 5x + 9\tfrac{1}{2}y = 13\tfrac{53}{56} \text{ Rheinl. Fuß.}$$

Man multiplicire (I.) mit 2 und (II.) mit 7, subtrahire sie hierauf und bestimme y, so erhält man

$$y = \tfrac{75}{76} \text{ Rheinl. Fuß.}$$

Es verhält sich also der Berl. Fuß zum Rheinländischen wie 75 : 76.

Substituirt man den Werth von y in (I.), so erhält man

$$x = \tfrac{32}{35} \text{ Rheinl. Fuß.}$$

Folglich verhält sich der Danziger Fuß zum Rheinländischen wie 32 : 35. Nun ist

$$\text{Berlin. : Rheinl.} = 75 : 76$$

$$\text{Rheinl. : Danz.} = 35 : 32$$

$$\text{folgl. Berl. : Danz.} = 75 \cdot 35 : 76 \cdot 32 = 2625 : 2432$$

Da nun endlich

$$2432 : 2625 = 100 : 107\tfrac{1138}{1216}$$

so ist der Berliner Fuß um $7\tfrac{1138}{1216}$ oder ungefähr um $7\tfrac{14}{15}$ Procent länger als der Danziger.

21.

Eine Franz. Meile sey = x Deutsche Meilen, und eine Engl. = y Deutsche Meilen, so sind 40 Franz. Meilen = 40x Deutsche Meilen, und 53 Engl. Meilen = 53y Deutsche Meilen. Es ist daher

$$40x = 53y + 12\tfrac{1}{2}$$

oder $$\text{I. } 40x - 53y = 12\tfrac{1}{2}$$

und $$\text{II. } 10x + 26\tfrac{1}{2}y = 11\tfrac{3}{4}$$

Multiplicirt man (II.) mit 2, addirt (I.) hinzu und bestimmt x, so erhält man

$$x = \tfrac{3}{5} \text{ Deutsche Meilen.}$$

Es verhält sich also die Franz. zur Deutschen Meile wie 3 : 5.

Substituirt man den Werth von y in (I.) und bestimmt y, so erhält man

$$y = \tfrac{23}{106} \text{ Deutsche Meilen.}$$

Es verhält sich also die Englische zur Deutschen Meile wie 23 : 106. Da nun

die Engl. M. : Deut. M. = 23 : 106
und die Deut. M. : Franz. M. = 5 : 3
so ist die Engl. M. : Franz. M. = 115 : 318

22.

Der Friedrichsd'or sey x rthlr. und der Dukaten y rthlr. werth, so ist

$$250x = 439y + \tfrac{7}{12} \text{ rthlr.}$$

und $$160x = 281y + 6$$

oder $$\text{I. } 250x - 439y = \tfrac{7}{12}$$

und $$\text{II. } 160x - 281y = 6$$

Multiplicirt man (I.) mit 16 und (II.) mit 25, ziehet beide Gleichungen von einander ab und bestimmt y, so erhält man

$y = 3\frac{1}{12}$ rthlr. = 3 rthlr. 2 gr. für den Werth eines Dukatens.

Substituirt man diesen Werth für y in (II.) und bestimmt x, so erhält man

$x = 5\frac{5}{12}$ rthlr. = 5 rthlr. 10 gr. für den Werth eines Friedrichsd'or.

23.

Der Livre sei zu x rthlr. und das Pf. Sterl. zu y rthlr. gerechnet. Da er nun in Deutschland 1520 rthlr. verzehrt hat, so ist

I. $7540x + 820y = 8325 - 1520 = 6805$ rthlr.

Ferner ist $5y = 108x + 3$

oder II. $108x - 5y = -3$

Multiplicirt man (II.) mit 164, addirt (I.) hinzu und bestimmt x, so erhält man

$x = \frac{1}{4}$ rthlr. = 6 gr.

Substituirt man diesen Werth von x in (II.) und bestimmt y, so erhält man

$y = 6$ rthlr.

24.

Das erste Pferd sey x rthlr. und das zweite y rthlr. werth. Legt er den bessern Sattel auf das Pferd, welches x rthlr., und den schlechtern auf das,

welches y rthlr. kostet, so ist das erstere $x + 50$ rthlr. und das andere $y + 2$ rthlr. werth. Es ist daher

$$x + 50 = y + 2 + 8 = y + 10$$

$$\text{oder I. } x - y = -40$$

Verwechselt er aber die Sättel, so ist das erstere $x + 2$ rthlr. und das andere $y + 50$ rthlr. werth. Es ist demnach

$$3\tfrac{8}{4}\ (x + 2) = y + 50$$

$$\text{oder II. } 3\tfrac{3}{4}x - y = 50 - 7\tfrac{1}{2} = 42\tfrac{1}{2}$$

Subtrahirt man (I.) von (II.) und bestimmt x, so erhält man

$$x = 30 \text{ rthlr.}$$

Substituirt man diesen Werth von x in (I.) und bestimmt y, so erhält man

$$y = 70 \text{ rthlr.}$$

25.

Der Zähler des gesuchten Bruches sey $= x$ und der Nenner $= y$, so ist

$$\frac{x + 1}{y} = \tfrac{1}{3}$$

$$\text{oder I. } 3x - y = -3$$

$$\text{Ferner ist } \frac{x}{y + 1} = \tfrac{1}{4}$$

$$\text{oder II. } 4x - y = 1$$

Subtrahirt man (I.) von (II.), so bleibt

$$x = 4$$

$$\text{und mithin } y = 15$$

Der gesuchte Bruch ist daher $\frac{4}{15}$

26.

Der Zähler des gesuchten Bruches sey = x und der Nenner = y, so ist

$$\frac{x-3}{y-3} = \frac{1}{4}$$

oder I. $4x - y = 9$

Ferner ist $\frac{x+5}{y+5} = \frac{1}{2}$

oder II. $2x - y = -5$

Subtrahirt man (II.) von (I.) und bestimmt x, so findet man

$$x = 7$$

und demnach $y = 19$

Der gesuchte Bruch ist daher $\frac{7}{19}$

27.

Das ausgeliehene Kapital von A sey = x und die dafür genommenen Procente = y, so ist das von B ausgeliehene Kapital = $12600 + x$ und die dafür genommenen Procente $y + 1$, und das Kapital von C = $3000 + x$, die Procente aber = $y + 2$. Hiernach sind die jährlichen Zinsen für A = $\frac{xy}{100}$, für B = $\frac{(12600 + x)(y + 1)}{100}$ und für C = $\frac{(3000 + x)(y + 2)}{100}$. Nach der Aufgabe erhält man nun folgende zwei Gleichungen

$$\frac{xy}{100} + 730 = \frac{(12600 + x)(y + 1)}{100}$$

$$\frac{xy}{100} + 380 = \frac{(3000 + x)(y + 2)}{100}$$

oder I. $60400 = 12600y + x$

II. $32000 = 3000y + 2x$

Subtrahirt man (II.) von (I.) und entwickelt y, so erhält man

$$\text{III. } y = \frac{28400 + x}{9600}$$

Diesen Werth von y in (I.) gesetzt, giebt endlich

$x = 10000$ rthlr.

und substituirt man diesen Werth in (III.), so findet man

$y = 4$ Procent ꝛc.

28.

Es sey die Anzahl der Personen $= x$, dasjenige, was ein jeder verzehrte, $= y$ gr., und das, was die ganze Zeche betragen hat, $= z$; so haben die x Personen xy gr. verzehrt. Es ist daher

$xy = z$ oder I. $xy - z = 0$

Wären 5 Personen mehr gewesen, und hätte jede 3 gr. mehr verzehrt, so hätte die ganze Zeche $(x + 5)(y + 3)$ gr. betragen. Es ist also nach der Aufgabe

$(x + 5)(y + 3) = z + 157$ gr.

das ist $xy + 3x + 5y + 15 = z + 157$

oder II. $xy + 3x + 5y - z = -15 + 157 = 142$

Wären ferner 3 Personen weniger gewesen, und hätte

jede 2 gr. weniger verzehrt, so hätte die ganze Zeche $(x - 3)(y - 2)$ gr. betragen. Folglich ist nach der Aufgabe

$$(x - 3)(y - 2) = z - 82$$

das ist $xy - 2x - 3y + 6 = z - 82$

oder III. $xy - 2x - 3y - z = - 6 - 82 = - 88$

Subtrahirt man (I.) von (II.), so bleibt

$$\text{IV.} \quad 3x + 5y = 142$$

Subtrahirt man ferner (I.) von (III.), so bleibt

$$\text{V.} \quad 2x + 3y = 88$$

Multiplicirt man endlich (IV.) mit 2, (V.) mit 3, und subtrahirt die letztere Gleichung von der erstern, so bleibt

$y = 20$ gr., was ein jeder verzehrte.

Diesen Werth von y in (IV.) oder (V.) substituirt, giebt $x = 14$ Personen.

29. *)

Es sey die Anzahl der Zeilen $= x$ und die der Buchstaben in jeder Zeile $= y$, so ist die Anzahl der Buchstaben auf jeder Seite $= xy$. Nun ist nach der Aufgabe

$$(x + 3)(y + 4) = xy + 224$$

und $(x - 2)(y - 3) = xy - 145$

oder I. $3y + 4x = 212$

II. $2y + 3x = 151$

*) Die vorhergehende Auflösung kann auch auf dieselbe Art wie folgende, ohne Einmischung einer dritten unbekannten Größe z, behandelt werden.

Aus (I.) ergiebt sich

$$y = \frac{212 - 4x}{3}$$

Diesen Werth in (II.) gesetzt, giebt demnach

$$x = 29$$

woraus man ferner erhält

$$y = 32$$

30.

Die eine Zahl sey x und die andere y, so ist

$$(x + a)\,(y + b) = xy + c$$

$$(x + a')\,(y + b') = xy + c'$$

oder I. $ay + bx = c - ab$

II. $a'y + b'x = c' - a'b'$

Aus (I.) erhält man

$$y = \frac{c - ab - bx}{a}$$

Diesen Werth in (II.) substituirt, giebt

$$x = \frac{ac' - a'c + aa'\,(b - b')}{ab' - a'b} \text{ ic.}$$

31.

Der Scheffel Weizen koste x gr. und der Scheffel Roggen koste y gr., so ist

$$x : y = 4 : 3, \text{ also } 3x = 4y$$

oder I. $3x - 4y = 0$

Ferner kostete vor einiger Zeit der Weizen $x - 24$ gr. und der Roggen $y - 21$ gr.; es ist daher

$$x - 24 : y - 21 = 10 : 7$$

also $7x - 168 = 10y - 210$

oder II. $7x - 10y = - 42$

Multiplicirt man (I.) mit 7 und (II.) mit 3, ziehet beide Gleichungen von einander ab, und bestimmt y, so findet man

$y = 63$ gr. $= 2$ rthlr. 15 gr.

und hieraus $x = 84$ gr. $= 3$ rthlr. 12 gr.

32.

Anfänglich mag im ersten Fasse x Quart und im zweiten y Quart Wein enthalten gewesen seyn; so ist, nachdem er aus dem ersten Fasse in das zweite so viel gießt, als bereits darin ist,

im ersten $x - y$ und im zweiten $2y$

enthalten. Gießt er nun aus dem zweiten in das erste so viel, als nunmehr darin enthalten ist,

so ist im ersten $2(x - y)$

und im zweiten $2y - (x - y) = 3y - x$

enthalten. Gießt er endlich wieder aus dem ersten in das zweite so viel, als bereits darin ist, so ist

im zweiten $2(3y - x)$

und im ersten $2(x - y) - (3y - x) = 3x - 5y$

Da nun zuletzt in beiden Fässern 16 Quart enthalten seyn sollen, so ist

I. $3x - 5y = 16$

und II. $- 2x + 6y = 16$

Multiplicirt man (I.) mit 2 und (II.) mit 3, addirt beide Gleichungen und bestimmt y, so findet man

$y = 10$ Quart im zweiten Fasse
und mithin $x = 22$ Quart im ersten Fasse.

33.

Hier findet man die Gleichungen

$$3x - 5y = a$$
$$\text{und } -2x + 6y = a$$

Verfährt man nun hier eben so wie in der vorhergehenden Aufgabe, so erhält man

$$y = \frac{5a}{8}$$
$$\text{und hieraus } x = \frac{11a}{8}$$

34.

Das Quart des bessern Weines koste x gr. und das Quart des schlechtern y gr. Vermischt er nun 3 Quart des bessern mit 5 Quart des schlechtern Weines, so kann er diese 8 Quart das Quart zu $20\frac{1}{2}$ gr. verkaufen. Es ist daher

$$\text{I. } 3x + 5y = (3 + 5) \cdot 20\tfrac{1}{2} = 164$$

Vermischt er aber $3\frac{3}{4}$ Quart des bessern mit $7\frac{1}{2}$ Quart des schlechtern, so ist

$$3\tfrac{3}{4}x + 7\tfrac{1}{2}y = (3\tfrac{3}{4} + 7\tfrac{1}{2})\, 20 = 225$$

oder, wenn man die Brüche wegschafft,

$$\text{II. } 15x + 30y = 900$$

Multiplicirt man nun (I.) mit 5, subtrahirt diese Gleichung von (II.) und bestimmt y, so findet man

y = 16 gr. Preis eines Quarts vom schlechtern Weine,

und hieraus x = 28 gr. Preis eines Quarts vom bessern Weine.

35.

Hier sind die beiden Gleichungen

$$\text{I.} \quad ax + by = (a + b)\, c$$

$$\text{II.} \quad fx + gy = (f + g)\, h$$

Multiplicirt man (I.) mit f und (II.) mit a, und ziehet die letztere Gleichung von der erstern ab, so ist

$$(bf - ag)\, y = (a + b)\, cf - (f + g)\, ah$$

$$\text{folgl. } y = \frac{(a + b)\, cf - (f + g)\, ah}{bf - ag}$$

Multiplicirt man ferner (I.) mit g und (II.) mit b, und ziehet die letztere von der erstern ab, so erhält man

$$x = \frac{(a + b)\, cg - (f + g)\, bh}{ag - bf}$$

36.

Es mögen x Pfund Zinn und y Pfund Blei in der Mischung gewesen seyn. Es ist daher

$$\text{I.} \quad x + y = 120 \text{ Pfund.}$$

Da nun ferner 37 Pfund Zinn im Wasser 5 Pf. verlieren, so verlieren x Pfund Zinn im Wasser $\frac{5x}{37}$ Pfund; 23 Pfund Blei verlieren im Wasser 2 Pfund, folglich verlieren y Pfund im Wasser $\frac{2y}{23}$ Pfund. Es verliert daher die Mischung von x Pfund Zinn + y Pfund Blei

$y = 10$ Quart im zweiten Fasse
und mithin $x = 22$ Quart im ersten Fasse.

33.

Hier findet man die Gleichungen

$$3x - 5y = a$$

und $$-2x + 6y = a$$

Verfährt man nun hier eben so wie in der vorhergehenden Aufgabe, so erhält man

$$y = \frac{5a}{8}$$

und hieraus $$x = \frac{11a}{8}$$

34.

Das Quart des bessern Weines koste x gr. und das Quart des schlechtern y gr. Vermischt er nun 3 Quart des bessern mit 5 Quart des schlechtern Weines, so kann er diese 8 Quart das Quart zu $20\frac{1}{2}$ gr. verkaufen. Es ist daher

$$\text{I.}\quad 3x + 5y = (3 + 5) \cdot 20\tfrac{1}{2} = 164$$

Vermischt er aber $3\frac{3}{4}$ Quart des bessern mit $7\frac{1}{2}$ Quart des schlechtern, so ist

$$3\tfrac{3}{4}x + 7\tfrac{1}{2}y = (3\tfrac{3}{4} + 7\tfrac{1}{2})\ 20 = 225$$

oder, wenn man die Brüche wegschafft,

$$\text{II.}\quad 15x + 30y = 900$$

Multiplicirt man nun (I.) mit 5, subtrahirt diese Gleichung von (II.) und bestimmt y, so findet man

y = 16 gr. Preis eines Quarts vom schlechtern Weine,

und hieraus x = 28 gr. Preis eines Quarts vom bessern Weine.

35.

Hier sind die beiden Gleichungen

$$\text{I.}\quad ax + by = (a + b)\,c$$

$$\text{II.}\quad fx + gy = (f + g)\,h$$

Multiplicirt man (I.) mit f und (II.) mit a, und ziehet die letztere Gleichung von der erstern ab, so ist

$$(bf - ag)\,y = (a + b)\,cf - (f + g)\,ah$$

$$\text{folgl. } y = \frac{(a + b)\,cf - (f + g)\,ah}{bf - ag}$$

Multiplicirt man ferner (I.) mit g und (II.) mit b, und ziehet die letztere von der erstern ab, so erhält man

$$x = \frac{(a + b)\,cg - (f + g)\,bh}{ag - bf}$$

36.

Es mögen x Pfund Zinn und y Pfund Blei in der Mischung gewesen seyn. Es ist daher

$$\text{I.}\quad x + y = 120 \text{ Pfund.}$$

Da nun ferner 37 Pfund Zinn im Wasser 5 Pf. verlieren, so verlieren x Pfund Zinn im Wasser $\frac{5x}{37}$ Pfund; 23 Pfund Blei verlieren im Wasser 2 Pfund, folglich verlieren y Pfund im Wasser $\frac{2y}{23}$ Pfund. Es verliert daher die Mischung von x Pfund Zinn + y Pfund Blei

im Wasser $\frac{5x}{37}$ Pfund $+ \frac{2y}{23}$ Pfund. Nun verliert aber, nach der Aufgabe, die Mischung im Wasser 14 Pfund. Es ist daher

$$\frac{5x}{37} + \frac{2y}{23} = 14$$

oder, wenn man die Brüche wegschafft,

$$\text{II.} \quad 115x + 74y = 11914$$

Multiplicirt man nun (I.) mit 74, ziehet diese Gleichung von (II.) ab und bestimmt x, so erhält man

$$x = 74 \text{ Pfund Zinn.}$$

Substituirt man diesen Werth von x in (I.) und bestimmt y, so erhält man

$$y = 46 \text{ Pfund Blei.}$$

37.

Es mögen x Pf. Silber und y Pf. Kupfer in der Mischung enthalten gewesen seyn. Es ist daher

$$\text{I.} \quad x + y = 148 \text{ Pfund.}$$

Da nun ferner 21 Pfund Silber im Wasser 2 Pf. verlieren, so verlieren x Pf. Silber im Wasser $\frac{2x}{21}$ Pf.; 9 Pf. Kupfer verlieren im Wasser 1 Pf., folglich verlieren y Pf. im Wasser $\frac{y}{9}$ Pf. Es verliert also die Mischung von x Pf. Silber + y Pf. Kupfer im Wasser $\frac{2x}{21}$ Pf. $+ \frac{y}{9}$ Pf. Nun verliert aber, nach der Aufgabe, die Mischung im Wasser $14\frac{2}{3}$ Pf. Es ist daher

$$\frac{2x}{21} + \frac{y}{9} = 14\frac{2}{3}$$

oder, wenn man die Brüche wegschafft,

$$\text{II.}\quad 6x + 7y = 924$$

Multiplicirt man (I.) mit 6 und ziehet diese Gleichung von (II.) ab, so findet man

$$y = 36 \text{ Pf. Kupfer.}$$

Substituirt man diesen Werth von y in (I.) und bestimmt x, so findet man

$$x = 112 \text{ Pf. Silber.}$$

38.

Die Mischung enthalte x Pf. von dem Metalle A und y Pf. von dem Metalle B. Es ist daher

$$\text{I.}\quad x + y = p$$

Da nun ferner p Pf. von A im Wasser b Pf. verlieren, so verlieren x Pfund $\frac{bx}{p}$ Pf.; p Pf. von B verlieren im Wasser c Pf., folglich verlieren y Pf. im Wasser $\frac{cy}{p}$ Pf. Es verliert also die Mischung von x Pf. + y Pf. im Wasser $\frac{bx}{p} + \frac{cy}{p}$. Nun verliert aber, nach der Aufgabe, diese Mischung im Wasser a Pf. Es ist daher

$$\frac{bx}{p} + \frac{cy}{p} = a$$

oder, wenn man die Brüche wegschafft,

$$\text{II.}\quad bx + cy = ap$$

Multiplicirt man (I.) mit b und ziehet diese Gleichung von (II.) ab, so findet man

$$y = \frac{(a-b)\,p}{c-b}$$

Multiplicirt man (I.) mit c und ziehet sie von (II.) ab, so erhält man

$$x = \frac{(a-c)\,p}{b-c} = \frac{(c-a)\,p}{c-b}$$

39.

Die Mischung enthalte x Pf. Gold und y Pf. Silber. Es ist daher

$$\text{I.}\ \ x + y = 20$$

Da nun 19,64 Pf. Gold im Wasser 1 Pf. verlieren, so verlieren x Pf. $\frac{x}{19,64}$ Pf. Ferner verlieren 10,5 Pf. Silber 1 Pf., folglich verlieren y Pf. im Wasser $\frac{y}{10,5}$ Pf. Es verliert demnach die ganze Mischung von x Pf. + y Pf. im Wasser $\frac{x}{19,64} + \frac{y}{10,5}$ Pf. Diese Mischung verliert nun, nach der Aufgabe, $1\frac{1}{4}$ Pf. Es ist daher

$$\frac{x}{19,64} + \frac{y}{10,5} = \frac{5}{4}$$

$$\text{oder II.}\ \ 10,5x + 19,64y = 257,775$$

Multiplicirt man (I.) mit 10,5 und ziehet diese Gleichung von (II.) ab, so erhält man

$$9,14y = 47,775$$

$$\text{und hieraus}\ \ y = 5,22\ldots \text{ꝛc.}$$

40.

Es werden x Pf. Blei und y Pf. Korkholz mit einander verbunden. Die Aufgabe verlangt nun, daß die Composition von Blei und Kork nicht allein ein bestimmtes Gewicht, sondern auch eine bestimmte Größe habe. In Hinsicht des Gewichts hat man die Gleichung

$$\text{I. } x + y = 80$$

in Hinsicht der Größe aber urtheile man folgendergestalt. Ein Kubikfuß Wasser wiege z. B. 1 Pfund, so wiegt 1 Kubikfuß Blei 11,324 Pfund. Man kann daher ansetzen

$$11{,}324 \text{ Pf.} : 1 \text{ Kubf.} = x \text{ Pf.} : \frac{x}{11{,}324} \text{ Kubf.}$$

und auf gleiche Weise

$$0{,}24 \text{ Pf.} : 1 \text{ Kubf.} = y \text{ Pf.} : \frac{y}{0{,}24} \text{ Kubf.}$$

Nun wiegt ferner 1 Kubf. von der Composition, die 80 Pf. wiegen soll, 0,45 Pf., es ist demnach auch

$$0{,}45 \text{ Pf.} : 1 \text{ Kubf.} = 80 \text{ Pf.} : \frac{80}{0{,}45} \text{ Kubf.}$$

Da nun der Körper von $\frac{80}{0{,}45}$ Kubf. entstanden ist, indem man $\frac{x}{11{,}324}$ Kubf. mit $\frac{y}{0{,}24}$ Kubf. verbunden hat, so erhält man die Gleichung

$$\text{II. } \frac{x}{11{,}324} + \frac{y}{0{,}24} = \frac{80}{0{,}45}$$

Aus den beiden Gleichungen (I. und II.) findet man nun leicht

$$x = 38{,}14 \ldots \text{ und } y = 41{,}85 \ldots$$

41.

Man verfährt hier eben so wie in der vorigen Auflösung. Es ist nämlich

$$p \text{ Pf.} : 1 \text{ Kubf.} = x \text{ Pf.} : \frac{x}{p} \text{ Kubf.}$$

Ferner $p' \text{ Pf.} : 1 \text{ Kubf.} = y \text{ Pf.} : \frac{y}{p'} \text{ Kubf.}$

und $p'' \text{ Pf.} : 1 \text{ Kubf.} = q \text{ Pf.} : \frac{q}{p''} \text{ Kubf.}$

Es ist demnach

$$x + y = q$$

$$\frac{x}{p} + \frac{y}{p'} = \frac{q}{p''}$$

Aus diesen beiden Gleichungen ergiebt sich

$$x = \frac{pq\,(p' - p'')}{p''\,(p' - p)};\ y = \frac{p'q\,(p'' - p)}{p''\,(p' - p)}$$

42.

Die Zahlen seyen x und y, so ist

$$x - y : x + y = 2 : 3$$

Ferner ist $x + y : \quad xy \quad = 3 : 5$

Man erhält daher durch die Zusammensetzung

$$x - y : \quad xy \quad = 2 : 5$$

Hieraus ergiebt sich

$$\text{I.} \quad 5x - 5y = 2xy$$

Aus der Proportion

$$x + y : xy = 3 : 5$$

ergiebt sich

$$\text{II.} \quad 5x + 5y = 3xy$$

Subtrahirt man nun (I.) von (II.), so bleibt

$$10y = xy \text{ oder } x = 10$$

Addirt man aber (I.) und (II.), so erhält man

$$10x = 5xy \text{ oder } y = 2$$

43.

Die Zahlen seyen x und y, so ist

$$\text{I. } x + y = m\,(x - y)$$

$$\text{und II. } xy = n\,(x - y)$$

Aus (I.) folgt $x + y : x - y = m : 1$

Aus (II.) folgt $x - y : xy = 1 : n$

Man erhält daher durch die Zusammensetzung

$$x + y : xy = m : n$$

Hieraus ergiebt sich

$$\text{III. } nx + ny = mxy$$

Aus der Proportion

$$x - y : xy = 1 : n$$

ergiebt sich

$$\text{IV. } nx - ny = xy$$

Subtrahirt man (IV.) von (III.), so ist

$$2ny = (m - 1)\,xy \text{ oder } 2n = (m - 1)\,x$$

$$\text{folgl. } x = \frac{2n}{m - 1}$$

Addirt man (III.) und (IV.), so ist

$$2nx = (m + 1)\,xy \text{ oder } 2n = (m + 1)\,y$$

$$\text{folgl. } y = \frac{2n}{m + 1}$$

44.

Die Zahlen seyen x und y, so ist

$$\text{I.}\quad x + y = 13$$

und $x^2 - y^2 = 39$

oder $$\text{II.}\quad (x + y)(x - y) = 39$$

Dividirt man (II.) durch (I.), so ist

$$\text{III.}\quad x - y = 3$$

Addirt man (III.) und (I.) und bestimmt x, so erhält man

$$x = 8$$

Subtrahirt man (III.) von (I.) und bestimmt y, so erhält man

$$y = 5$$

45.

Die Zahlen seyen x und y, so ist

$$\text{I.}\quad x + y = a$$

und $x^2 - y^2 = b$

oder $$\text{II.}\quad (x + y)(x - y) = b$$

Dividirt man (II.) durch (I.), so ist

$$\text{III.}\quad x - y = \frac{b}{a}$$

Addirt man (III.) und (I.) und bestimmt x, so erhält man

$$x = \frac{a^2 + b}{2a}$$

Subtrahirt man (III.) von (I.) und bestimmt y, so findet man

$$y = \frac{a^2 - b}{2a}$$

46.

Die beiden Zahlen seyen x und y, so ist

$$\text{I. } x + y = a$$

und $\frac{x}{y} = b$ oder II. $x = by$

Subtrahirt man (II.) von (I.) und bestimmt y, so findet man

$$y = \frac{a}{b+1}$$

Substituirt man diesen Werth für y in (II.), so erhält man

$$x = \frac{ab}{b+1}$$

47.

Das Alter des Sohnes sey = x, das Alter des Vaters = y, und das Alter des Großvaters = z, so ist

$$\text{I. } x + y = 56$$
$$\text{II. } y + z = 100$$
$$\text{III. } x + z = 80$$

Addirt man diese Gleichungen, so erhält man

$$2(x + y + z) = 236$$

oder $x + y + z = 118$

Ziehet man von dieser Gleichung nach und nach (II.), (III.) und (I.) ab, so erhält man

x = 18 Jahre, Alter des Sohnes
y = 38 Jahre, Alter des Vaters
z = 62 Jahre, Alter des Großvaters.

48.

Nennt man auch hier die Zahlen x, y und z, so ist

$$\text{I.}\quad x + y = a$$
$$\text{II.}\quad y + z = b$$
$$\text{III.}\quad x + z = c$$

Addirt man diese drei Gleichungen, so erhält man

$$2(x + y + z) = a + b + c$$

$$\text{oder}\quad x + y + z = \frac{a + b + c}{2}$$

Ziehet man von dieser Gleichung nach und nach (I.), (II.) und (III.) ab, so erhält man

$$z = \frac{c + b - a}{2};\ x = \frac{a - b + c}{2};\ y = \frac{a + b - c}{2}$$

49.

A besitze x rthlr., B y rthlr. und C z rthlr., so ist

$$\text{I.}\quad x + \frac{3y}{7} = 2190$$

$$\text{II.}\quad y + \frac{5z}{9} = 2190$$

$$\text{III.}\quad z + \frac{2x}{3} = 2190$$

Multiplicirt man (II.) mit $\frac{3}{7}$ und ziehet diese Gleichung von (I.) ab, so bleibt

$$\text{IV.}\quad x - \frac{5z}{21} = \frac{8760}{7}$$

Multiplicirt man diese Gleichung mit $\frac{2}{3}$, subtrahirt sie von (III.) und bestimmt z, so findet man

$z = 1170$ rthlr. Vermögen des C
und also $y = 1540$ rthlr. Vermögen des B
$x = 1530$ rthlr. Vermögen des A

50.

A besitze x rthlr., B y rthlr. und C z rthlr., so ist

$$x + y = \frac{2z}{3} \quad \text{oder} \quad \text{I. } x + y - \frac{2z}{3} = 0$$

$$y + z = 6x \quad \text{oder} \quad \text{II. } y + z - 6x = 0$$

$$y + 680 = x + z \quad \text{oder} \quad \text{III. } x + z - y = 680$$

Man subtrahire (II.) von (I.) und bestimme x, so findet man

$$x = \frac{5z}{21}$$

Ferner multiplicire man (I.) mit 6, addire (II.) dazu und bestimme y, so findet man

$$y = \frac{3z}{7}$$

Substituirt man nun die Werthe von x und y in (III.) und bestimmt z, so findet man

$z = 840$ rthlr. Vermögen des C
und also $y = 360$ rthlr. Vermögen des B
$x = 200$ rthlr. Vermögen des A

51.

Im ersten Beutel seyen x rthlr., im zweiten y rthlr. und im dritten z rthlr. befindlich, so ist

$$4\,(x-20) = y+20 \quad \text{oder} \quad \text{I. } 4x - y = 100$$

$$\frac{7}{4}\,(y-60) = z+60 \quad \text{oder} \quad \text{II. } \frac{7y}{4} - z = 165$$

$$z - 40 = \frac{23}{8}(x+40) \quad \text{oder} \quad \text{III. } z - \frac{23x}{8} = 155$$

Addirt man (II.) und (III.), so ist

$$\text{IV. } \frac{7y}{4} - \frac{23x}{8} = 320$$

Multiplicirt man ferner (I.) mit $\frac{7}{4}$, addirt diese Gleichung zu (IV.) und bestimmt x, so erhält man

$x = 120$ rthlr. im ersten Beutel
und also $y = 380$ rthlr. im zweiten Beutel
$z = 500$ rthlr. im dritten Beutel.

52.

A habe x rthlr., B y rthlr. und C z rthlr., so ist

$$x + 700 = 2\,(y - 700) \quad \text{oder} \quad \text{I. } x - 2y = -2100$$

$$y + 1400 = 3\,(z - 1400) \quad \text{oder} \quad \text{II. } y - 3z = -5600$$

$$z + 420 = 5\,(x - 420) \quad \text{oder} \quad \text{III. } z - 5x = -2520$$

Multiplicirt man (II.) mit 2 und addirt diese Gleichung zu (I.), so ist

$$\text{IV. } x - 6z = -13300$$

Multiplicirt man ferner (III.) mit 6, addirt diese Gleichung zu (IV.) und bestimmt x, so findet man

$x = 980$ rthlr. Vermögen des A
und also $y = 1540$ rthlr. Vermögen des B
$z = 2380$ rthlr. Vermögen des C

53.

Die Zahlen seyen x, y und z, so ist

$$x - 4 : y + 4 = 1 : 2$$
$$y - 10 : z + 10 = 3 : 10$$
$$x - 5 : z + 5 = 3 : 11$$

Hieraus ergiebt sich

$$2x - 8 = y + 4 \quad \text{oder} \quad \text{I.} \; 2x - y = 12$$
$$10y - 100 = 3z + 30 \quad \text{oder} \quad \text{II.} \; 10y - 3z = 130$$
$$11x - 55 = 3z + 15 \quad \text{oder} \quad \text{III.} \; 11x - 3z = 70$$

Subtrahirt man (III.) von (II.), so bleibt

$$\text{IV.} \; 10y - 11x = 60$$

Multiplicirt man (I.) mit 10, addirt diese Gleichung zu (IV.) und bestimmt x, so erhält man

$$x = 20$$
$$\text{und also } y = 28$$
$$z = 50$$

54.

A habe x rthlr., B y rthlr.,
so hat C 1820 rthlr. $- x - y$

Nun ist $x + 200 = y - 200 + 160$
und $y + 70 = 1820 - x - y - 70$
oder I. $x - y = -240$
II. $x + 2y = 1680$

Subtrahirt man (I.) von (II.), so ist

$$3y = 1920$$

folgl. $y = 640$ rthlr. x.

55.

A besitze x rthlr., B y rthlr. Da nun C, nach der Aufgabe, 4 rthlr. hat, so ist

$$x + \frac{y}{4} = y + \frac{1}{2} \text{ oder } x - \frac{3y}{4} = \frac{1}{2}$$

also I. $4x - 3y = 2$

Ferner ist $\frac{x}{2} + 4 = y + \frac{1}{2}$ oder $\frac{x}{2} - y = -3\frac{1}{2}$

also II. $x - 2y = -7$

Multiplicirt man (II.) mit 4, subtrahirt davon (I.) und bestimmt y, so findet man

$y = 6$ rthlr. die Summe, welche A besitzt,

und also $x = 5$ rthlr. die Summe, welche B besitzt.

Folglich ist die Summe, welche verzehrt worden,

$= y + \frac{1}{2} = 6\frac{1}{2}$ rthlr.

56.

Er habe x Mark 15löthiges, y Mark 10löthiges und z Mark 9löthiges Silber. Schmelzt er das 15- und 10löthige zusammen, so ist in der Masse $x + y$ $15x + 10y$ Loth Silber enthalten. Da nun, nach der Aufgabe, dieses zusammengeschmolzene Silber $11\frac{2}{3}$löthig seyn soll, so enthalten $x + y$ Mark $(x + y)\,11\frac{2}{3}$ Loth Silber. Es ist demnach

$$15x + 10y = 11\tfrac{2}{3}\,x + 11\tfrac{2}{3}\,y$$

oder $3\frac{1}{3}\,x - 1\frac{2}{3}y = 0$

Schafft man die Brüche weg, so ist

$10x - 5y = 0$ oder I. $2x - y = 0$

Schmelzt er das 10- und 9löthige zusammen, so ist in der Masse $y + z$ $10y + 9z$ Loth Silber enthal-

ten. Nun soll, nach der Aufgabe, dieses zusammengeschmolzene Silber $11\frac{2}{3}$löthig seyn, folglich ist

$$15x + 9z = 11\tfrac{2}{3}x + 11\tfrac{2}{3}z$$

$$\text{oder } 3\tfrac{1}{3}x - 2\tfrac{2}{3}z = 0$$

Schafft man die Brüche weg, so ist

$$10x - 8z = 0 \text{ oder II. } 5x - 4z = 0$$

Nun ist ferner

$$\text{III.} \quad x + y + z = 34$$

Addirt man hierzu (I.), so erhält man

$$3x + z = 34$$

Multiplicirt man diese Gleichung mit 4, addirt (II.) hinzu und bestimmt x, so findet man

$x = 8$ Mark 15löthiges Silber
und also $y = 16$ Mark 10löthiges „
$z = 10$ Mark 9löthiges „

57.

Der Dukaten mag zu x rthlr., der Friedrichsd'or zu y rthlr. und der Carolin zu z rthlr. gerechnet seyn; so ist

$$\text{I.} \quad 5x + 7y + 2z = 67\tfrac{1}{4}$$

$$\text{II.} \quad 4x + 9y + 8z = 113\tfrac{7}{12}$$

$$\text{III.} \quad 12x + 6y + 4z = 96$$

Multiplicirt man (I.) mit 2 und subtrahirt davon (III.), so bleibt

$$-2x + 8y = 38\tfrac{1}{2}$$

$$\text{oder IV.} - x + 4y = 19\tfrac{1}{4}$$

Multiplicirt man ferner (III.) mit 2 und subtrahirt davon (II.), so bleibt

$$\text{V.}\quad 20x + 3y = 78\tfrac{5}{12}$$

Multiplicirt man endlich (IV.) mit 20, addirt diese Geichung zu (V.) und bestimmt y, so findet man

$y = 5\frac{7}{12}$ rthlr. Werth des Friedrichsd'or

und also $x = 3\frac{1}{12}$ rthlr. Werth des Dukaten

$z = 6\frac{2}{8}$ rthlr. Werth des Carolin.

58.

Der Wispel Weizen koste x rthlr., der Wispel Roggen y rthlr. und der Wispel Gerste z rthlr.; so ist

$$\text{I.}\quad 8x + 3y + 5z = 734$$
$$\text{II.}\quad 3x + 10y + 7z = 812$$
$$\text{III.}\quad 6x + 9y + 13z = 1130$$

Multiplicirt man (I.) mit 3 und ziehet (III.) davon ab, so bleibt

$$18x + 2z = 1072$$
$$\text{oder IV.}\quad 9x + z = 536$$

Multiplicirt man ferner (I.) mit 10 und (II.) mit 3 und ziehet letztere Gleichung von der erstern ab, so bleibt

$$\text{V.}\quad 71x + 29z = 4904$$

Multiplicirt man endlich (IV.) mit 29, ziehet (V.) davon ab und bestimmt x, so findet man

$x = 56$ rthlr. Preis des Weizens

und also $y = 42$ rthlr. Preis des Roggens

$z = 32$ rthlr. Preis der Gerste.

59.

Das Pfund Kaffee koste x rthlr., das Pfund Zucker y rthlr. und das Pfund Thee z rthlr.; so ist

$$\text{I. } 7\tfrac{1}{2}x + 3y + 2\tfrac{1}{4}z = 11\tfrac{5}{8}$$
$$\text{II. } 9x + 7y + 3z = 16\tfrac{1}{4}$$
$$\text{III. } 2x + 5\tfrac{1}{2}y + 4z = 12\tfrac{1}{4}$$

Man multiplicire (I.) mit 7 und (II.) mit 3, und ziehe die letztere Gleichung von der erstern ab, so bleibt

$$25\tfrac{1}{2}x + 6\tfrac{3}{4}z = 32\tfrac{5}{8}$$

oder, indem man die Brüche wegschafft und die ganze Gleichung durch 3 dividirt,

$$\text{IV. } 68x + 18z = 87$$

Multiplicirt man ferner (I.) mit $5\frac{1}{2}$ und (III.) mit 3, und ziehet die letztere Gleichung von der erstern ab, so bleibt

$$35\tfrac{1}{4}x + \tfrac{3}{8}z = 27\tfrac{3}{16}$$

oder, indem man die Brüche wegschafft und die ganze Gleichung durch 3 dividirt,

$$\text{V. } 188x + 2z = 145$$

Multiplicirt man endlich (V.) mit 9, ziehet von dieser Gleichung (IV.) ab und bestimmt x, so findet man

$x = \frac{3}{4}$ rthlr. = 18 gr. Preis des Kaffees

und also $y = \frac{1}{2}$ rthlr. = 12 gr. Preis des Zuckers

$z = 2$ rthlr. Preis des Thees.

60.

Man setze, A mache die ganze Arbeit in x Tagen, B in y Tagen und C in z Tagen fertig; so macht A in einem Tage $\frac{1}{x}$ der Arbeit, B in einem

Tage $\frac{1}{y}$ der Arbeit, und C in einem Tage $\frac{1}{z}$ der Arbeit. Es machen daher A und B zusammen in einem Tage $\frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ der Arbeit fertig. Da nun A und B zusammen die Arbeit in 12 Tagen vollenden, so machen sie in einem Tage $\frac{1}{12}$ der Arbeit. Es ist demnach

$$\text{I.} \quad \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{12}$$

Auf eine ähnliche Art findet man

$$\text{II.} \quad \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{20}$$

$$\text{und III.} \quad \frac{1}{x} + \frac{1}{z} = \frac{1}{15}$$

Subtrahirt man (II.) von (I.), so bleibt

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{z} = \frac{1}{30}$$

Addirt man hierzu (III.) und bestimmt x, so findet man

$x = 20$ Tage, worin A die Arbeit vollendet,
und also $y = 30$ Tage für B
$z = 60$ Tage für C

Da nun ferner A, B und C zusammen in einem Tage $\frac{1}{20} + \frac{1}{30} + \frac{1}{60} = \frac{1}{10}$ der Arbeit fertig machen, so vollenden sie zusammen die ganze Arbeit in 10 Tagen.

61.

Hier habe x, y und z dieselbe Bedeutung wie in der vorigen Aufgabe. Da nun A und B zusammen

die Arbeit in a Tagen vollenden, so machen sie in einem Tage $\frac{1}{a}$ der Arbeit. Es ist demnach

$$\text{I.}\quad \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{a}$$

und ebenso
$$\text{II.}\quad \frac{1}{x} + \frac{1}{z} = \frac{1}{b}$$

$$\text{III.}\quad \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{c}$$

Subtrahirt man (III.) von (I.), so bleibt

$$\text{IV.}\quad \frac{1}{x} - \frac{1}{z} = \frac{1}{a} - \frac{1}{c} = \frac{c-a}{ac}$$

Addirt man hierzu (II.) und bestimmt x, so findet man

$$x = \frac{2abc}{bc + ac - ab}$$

Subtrahirt man ferner (II.) von (I.), so bleibt

$$\frac{1}{y} - \frac{1}{z} = \frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \frac{b-a}{ab}$$

Addirt man hierzu (III.) und bestimmt y, so findet man

$$y = \frac{2abc}{bc + ab - ac}$$

Subtrahirt man endlich (IV.) von (II.) und bestimmt z, so findet man

$$z = \frac{2abc}{ab + ac - bc} \text{ ꝛc.}$$

62.

Man findet die Werthe von x, y und z in dieser Aufgabe, welche als ein specieller Fall der vor-

hergehenden anzusehen ist, wenn man in die allgemeinen Formeln, welche man in jener Aufgabe gefunden hat, statt a, b, c, die hier gegebenen Größen setzt. Nun ist $a = 70$, $b = 84$, $c = 140$. Es ist daher

$$x = \frac{2 \cdot 70 \cdot 84 \cdot 140}{84 \cdot 140 + 70 \cdot 140 - 70 \cdot 84} = \frac{1646400}{15680}$$
$$= 105 \text{ Minuten}$$

$$y = \frac{2 \cdot 70 \cdot 84 \cdot 140}{84 \cdot 140 + 70 \cdot 84 - 70 \cdot 140} = \frac{1646400}{7840}$$
$$= 210 \text{ Minuten.}$$

$$z = \frac{2 \cdot 70 \cdot 84 \cdot 140}{70 \cdot 84 + 70 \cdot 140 - 84 \cdot 140}$$
$$= \frac{1646400}{5880 + 9800 - 11760} = 420 \text{ Minuten.}$$

63.

Von dem ersten Stück mag er x Loth, vom zweiten y Loth und vom dritten z Loth genommen haben. Da nun im ersten Stücke das Gold, das Silber und das Kupfer nach dem Verhältniß von 5 : 15 : 30 oder 1 : 3 : 6 enthalten ist, so muß x in drei Theile, welche sich wie 1 : 3 : 6 verhalten, zerfällt werden. Man dividire daher x durch $1 + 3 + 6 = 10$, und multiplicire diesen Bruch nach und nach mit 1, 3 und 6, so erhält man für die drei Theile, woraus x zusammengesetzt ist, $\frac{x}{10}$ Loth Gold, $\frac{3x}{10}$ Loth Silber, $\frac{3x}{5}$ Loth Kupfer. Im zweiten Stücke ist das Verhältniß des Goldes, Silbers und Kupfers durch die Zahlen 20,

28, 48 oder 5, 7, 12 ausgedrückt. Man muß daher y nach diesen Verhältnissen theilen. Es ist also y aus $\frac{5y}{24}$ Loth Gold, $\frac{7y}{24}$ Loth Silber und $\frac{y}{2}$ Loth Kupfer zusammengesetzt. Auf eine ähnliche Art findet man, daß in z $\frac{4z}{25}$ Loth Gold, $\frac{13z}{25}$ Loth Silber und $\frac{8z}{25}$ Loth Kupfer enthalten ist. Es ist demnach in den drei hinweggenommenen Stücken Metall

$$\frac{x}{10}+\frac{5y}{24}+\frac{4z}{25} \text{ Loth Gold}$$

$$\frac{3x}{10}+\frac{7y}{24}+\frac{13z}{25} \text{ Loth Silber}$$

$$\frac{3x}{5}+\frac{y}{2}+\frac{8z}{25} \text{ Loth Kupfer}$$

enthalten. Da nun, nach der Aufgabe, in der Composition 10 Loth Gold enthalten seyn sollen, so ist

$$\frac{x}{10}+\frac{5y}{24}+\frac{4z}{25} = 10$$

oder I. $60x + 125y + 96z = 6000$

Ferner sollen in der Composition 23 Loth Silber enthalten seyn. Es ist also

$$\frac{3x}{10}+\frac{7y}{24}+\frac{13z}{25} = 23$$

oder II. $180 + 175y + 212z = 13800$

Endlich soll die Composition 26 Loth Kupfer enthalten. Es ist also

$$\frac{3x}{5}+\frac{y}{2}+\frac{8z}{25} = 26$$

oder III. $30x + 25y + 16z = 1300$

Multiplicirt man (III.) mit 2, und subtrahirt diese Gleichung von (I.), so bleibt

IV. $75y + 64z = 3400$

Multiplicirt man ferner (I.) mit 3 und subtrahirt davon (II.), so bleibt

V. $200y - 24z = 4200$

Multiplicirt man endlich (IV.) mit 3 und (V.) mit 8, addirt diese beiden Gleichungen zu einander, und bestimmt y, so findet man

$y = 24$ Loth

und also $x = 10$ Loth

$z = 25$ Loth.

64.

A habe x rthlr., B y rthlr. und C z rthlr. erbeutet. Nun giebt A dem B und C so viel wie jeder hat, es bleibt ihm also noch übrig $x - y - z$. Da ihm nun dieser Rest von B verdoppelt wird, und dieser zweifache Rest abermals von C verdoppelt wird, so ist am Ende der Mittheilung dieser Rest $= 4\,(x - y - z)$. Nun soll, nach der Aufgabe, am Ende der Mittheilung ein jeder gleich viel von den erbeuteten 96 rthlr. haben; es hat demnach ein jeder $\frac{96}{3} = 32$ rthlr. Hieraus folgt

$$4\,(x - y - z) = 32$$

$$\text{oder } x - y - z = 8$$

Nach der ersten Mittheilung hat also A 8 rthlr., B 2y rthlr. und C 2z rthlr. Nun giebt B dem A 8 rthlr. und dem C 2z rthlr., er behält also 2y — 2z — 8 rthlr. übrig. Nachdem ihm dieser Rest von C verdoppelt wird, besitzt er nach der Aufgabe 32 rthlr. Es ist also

$$2(2y - 2z - 8) = 32$$

$$\text{oder } 2y - 2z - 8 = 16$$

Nach der zweiten Mittheilung hat also A 16 rthlr., B 16 rthlr. und C 4z rthlr. Nun giebt endlich C dem A 16 rthlr. und dem B 16 rthlr., es bleiben ihm also noch 4z — 16 — 16 oder 4z — 32, und dieser Rest beträgt nach der Aufgabe 32 rthlr. Es ist daher

$$4z - 32 = 32$$

folgl. $z = 16$ rthlr. die Beute des C

und also $y = 28$ rthlr. die Beute des B

$x = 52$ rthlr. die Beute des A

Andere Auflösung.

Da A x rthlr. erbeutet hat, so beträgt die Beute des B und C $96 - x$. Nun giebt A dem B und C so viel, wie sie besitzen, nämlich $96 - x$; er behält demnach $x - (96 - x) = 2x - 96$ übrig. Dieser Rest wird ihm durch B und C vervierfacht, er hat also am Ende der Mittheilung $8x - 384$; und dieses ist, nach der Aufgabe, $= \frac{96}{3} = 32$. Es ist also

$$8x - 384 = 32$$

folgl. $x = 52$ rthlr. Beute des A

Nun besitzt B nach der ersten Mittheilung $2y$, folglich besitzen A und C zusammen $96 - 2y$. Es bleibt also dem B nach der Mittheilung an A und C $2y - (96 - 2y) = 4y - 96$ übrig. Dieser Rest wird ihm durch C verdoppelt; er hat also am Ende der Mittheilung $8y - 192$, und dieses ist $= 32$. Es ist demnach

$$8y - 192 = 32$$

folgl. $y = 28$ rthlr. Beute des B

Hieraus ergiebt sich also

$z = 96 - (52 + 28) = 16$ rthlr. Beute des C.

Arithmetische Auflösung.

Nachdem C dem A und B so viel gegeben hat, als jeder besitzt, hat jeder 32 rthlr., mithin muß A sowohl als B vor dieser Mittheilung 16 rthlr. gehabt haben; und da C jedem 16 rthlr., also zusammen 32 rthlr. giebt und noch 32 rthlr. übrig behält, so muß C 64 rthlr. gehabt haben. Dieses war die Baarschaft eines jeden, bevor C oder nachdem B mitgetheilt hatte.

Bevor also B mitgetheilt hatte, mußte A 8 rthlr., C 32 rthlr. gehabt haben; und da B $32 + 8 = 40$ rthlr. weggiebt und noch 16 rthlr. übrig behält, so muß B 56 rthlr. gehabt haben. Dieses war diejenige Summe, welche ein jeder hatte, bevor B oder nachdem A mitgetheilt hatte.

Bevor also A dem B und C jedem so viel gab als er bereits hatte, mußte B 28 rthlr., C 16 rthlr. gehabt haben; und da A $28 + 16 = 44$ rthlr. weggiebt und noch 8 rthlr. übrig behält, so muß A 52 rthlr. gehabt haben.

65.

Die drei Fächer mögen A, B, C heißen, und in A seyen x rthlr. enthalten, so ist die Summe, welche sich in B und C zusammen befindet, $= 162 - x$. Nun wird in B und C so viel hinein gelegt, als die Hälfte des bereits darin befindlichen Geldes beträgt, das ist $\frac{162-x}{2}$; es bleibt daher in A $x - \frac{162-x}{2} = \frac{3x-162}{2}$ übrig. Nun wird zuvörderst aus B die Hälfte dieses Restes $= \frac{3x-162}{4}$ zugelegt, wodurch sich also in A $\frac{3x-162}{2} + \frac{3x-162}{4} = \frac{9x-486}{4}$ befinden. Alsdann wird abermals aus C die Hälfte dieser Summe $= \frac{9x-486}{8}$ zugelegt; es befindet sich also in A $\frac{9x-486}{4} + \frac{9x-486}{8} = \frac{27x-1458}{8}$. Nach dieser Vertheilung befindet sich, der Aufgabe gemäß, in A $\frac{162}{3} = 54$ rthlr. Es ist demnach

$$\frac{27x-1458}{8} = 54$$

folgl. $x = 70$ rthlr. im Fache A.

Nun sey ferner in B anfänglich y rthlr. enthalten, so ist in diesem Fache, nachdem aus A $\frac{1}{2}y$ zugelegt worden, $\frac{3y}{2}$ befindlich, mithin ist in A und C zusammen $162 - \frac{3y}{2} = \frac{324 - 3y}{2}$ enthalten. Es bleibt also, nachdem man aus B in A und C die Hälfte von dem, was schon darin ist, nämlich $\frac{324-3y}{4}$ zugelegt, in B $\frac{3y}{2} - \frac{324 - 3y}{4} = \frac{9y - 324}{4}$ zurück. Dieser Rest wird aus C um die Hälfte $= \frac{9y - 324}{8}$ vermehrt. Es ist daher am Ende der Vertheilung in B $\frac{9y - 324}{4} + \frac{9y - 324}{8} = \frac{27y - 972}{8}$ enthalten. Dieses giebt also

$$\frac{27y - 972}{8} = 54$$

folgl. $y = 52$ rthlr. im Fache B

Es sind demnach im dritten Fache C anfänglich

$$162 - (70 + 52) = 40 \text{ rthlr.}$$

enthalten gewesen.

Die Aufgabe läßt sich auf eine ähnliche Art wie die vorhergehende arithmetisch auflösen.

66.

Vor dem Spiele habe A x Dukaten, B y Dukaten und C z Dukaten gehabt. Ferner setze man die Summe, welche A, B und C vor dem Spiele hatten,

$= s$, oder $x + y + z = s$. Da nun A x rthlr. hat, so haben die beiden andern zusammen $s - x$, und folglich verliert A an B und C $\frac{s-x}{3}$; es bleibt ihm daher $x - \frac{s-x}{3} = \frac{4x-s}{3}$ übrig. Es hat demnach am Ende des ersten Spiels

$$A\ \frac{4x-s}{3},\ B\ \frac{4y}{3},\ C\ \frac{4z}{3}$$

Da nun B $\frac{4y}{3}$ hat, so haben A und C zusammen $s - \frac{4y}{3} = \frac{3s-4y}{3}$, und folglich verliert B an A und C $\frac{3s-4y}{9}$; es bleibt ihm daher $\frac{4y}{3} - \frac{3s-4y}{9} = \frac{16y-3s}{9}$ übrig. A aber hat zu seinen $\frac{4x-s}{3}$ noch ein Drittel, nämlich $\frac{4x-s}{9}$ zu bekommen, und hat daher $\frac{4x-s}{3} + \frac{4x-s}{9} = \frac{16x-4s}{9}$, und C hat $\frac{4z}{3} + \frac{4z}{9} = \frac{16z}{9}$. Es hat demnach am Ende des zweiten Spiels

$$A\ \frac{16x-4s}{9},\ B\ \frac{16y-3s}{9},\ C\ \frac{16z}{9}$$

Da nun endlich C $\frac{16z}{9}$ hat, so haben A und B zusammen $s - \frac{16z}{9} = \frac{9s-16z}{9}$, und folglich verliert C an A und B $\frac{9s-16z}{27}$; es bleibt ihm daher

$\frac{16z}{9} - \frac{9s - 16z}{27} = \frac{64z - 9s}{27}$ übrig. A aber hat zu der Summe $\frac{16x - 4s}{9}$ noch ein Drittel zu bekommen, er hat daher $\frac{16x - 4s}{9} + \frac{16x - 4s}{27} = \frac{64x - 16s}{27}$, und B hat $\frac{16y - 3s}{9} + \frac{16y - 3s}{27} = \frac{64y - 12s}{27}$. Es hat demnach am Ende des dritten Spiels

$$A\ \frac{64x - 16s}{27},\ B\ \frac{64y - 12s}{27},\ C\ \frac{64z - 9s}{27}$$

Nun hat, nach der Aufgabe, am Ende des Spiels ein jeder 64 Dukaten, und während des Spiels ist kein anderes Geld weder hinzugekommen noch hinweggenommen worden; sie haben also zusammen anfänglich $3 \cdot 64 = 192$ Dukaten $= s$ gehabt. Es ist daher

$$\frac{64x - 16 \cdot 192}{27} = 64$$

folgl. $x = 75$ Dukaten für A

Ferner $\frac{64y - 12 \cdot 192}{27} = 64$

folgl. $y = 63$ Dukaten für B

und endlich $\frac{64z - 9 \cdot 192}{27} = 64$

folgl. $z = 54$ Dukaten für C.

67.

Vor dem Spiele habe A x rthlr., B y rthlr., C z rthlr., D u rthlr., E v rthlr. gehabt. Ferner

sey $x+y+z+u+v=s$. Da nun A x rthlr. hat, so haben B, C, D, E zusammen $s-x$ rthlr., und folglich verliert A $s-x$; es bleibt ihm daher noch $x-(s-x)=2x-s$ übrig. Es hat demnach am Ende des ersten Spiels

A $2x-s$, B $2y$, C $2z$, D $2u$, E $2v$.

Da nun B $2y$ hat, so haben die übrigen vier Spieler $s-2y$, und folglich verliert B $s-2y$; er behält also $2y-(s-2y)=4y-s$ übrig. Es hat demnach am Ende des zweiten Spiels

A $4x-2s$, B $4y-s$, C $4z$, D $4u$, E $4v$.

Nun hat ferner C $4z$; mithin haben die übrigen $s-4z$, und folglich verliert C $s-4z$, und behält demnach $4z-(s-4z)=8z-s$. Es hat also am Ende des dritten Spiels

A $8x-4s$, B $8y-2s$, C $8z-s$, D $8u$, E $8v$.

Nunmehr hat D $8u$, folglich haben die übrigen $s-8u$, und so viel verliert D; es bleibt ihm also noch $8u-(s-8u)$ $=16u-s$ übrig. Es hat demnach am Ende des vierten Spiels

A $16x-8s$, B $16y-4s$, C $16z-2s$,
D $16u-s$, E $16v$.

E hat $16v$, folglich haben die übrigen $s-16v$, und so viel verliert E; es bleibt ihm also noch $16v-(s-16v)$ $=32v-s$. Es hat demnach am Ende des fünften Spiels

A $32x-16s$, B $32y-8s$, C $32z-4s$,
D $32u-2s$, E $32v-s$.

Nun hat, nach der Aufgabe, am Ende des Spiels ein jeder 32 rthlr., und während des Spiels ist kein anderes Geld weder hinzugekommen noch hinweggenommen worden; sie haben also zusammen anfänglich $5 \cdot 32 = 160$ rthlr. $= s$ gehabt. Es ist daher

$32x - 16 \cdot 160 = 32$ oder $x = 81$ rthlr. für A
ferner $32y - 8 \cdot 160 = 32$ oder $y = 41$ rthlr. für B
und $32z - 4 \cdot 160 = 32$ oder $z = 21$ rthlr. für C
und $32u - 2 \cdot 160 = 32$ oder $u = 11$ rthlr. für D
und $32v - 1 \cdot 160 = 32$ oder $v = 6$ rthlr. für E

Arithmetische Auflösung.

Die ganze Summe, welche unter den Spielenden cirkulirt, ist $= 5 \cdot 32 = 160$. Nun verliert A so viel, wie die übrigen vier zusammen besitzen, und behält noch einen Rest übrig. Die 160 rthlr. zerfallen also in zwei gleiche Theile und diesen Rest, wovon A einen solchen Theil nebst dem Reste vor dem Spiele besitzt. Man erhält daher das Geld von A, sobald man diesen Rest kennt.

Man schließe also: Nachdem A gespielt und verloren hat, wird ihm der Rest von B verdoppelt, und diese Summe abermals von C, und so immer nach und nach von D und E verdoppelt, d. h. der Rest wird mit $2^4 = 16$ multiplicirt. Da er nun am Ende des Spiels 32 rthlr. hat, so kann der erwähnte Rest keine andere Zahl als 2 seyn, weil nämlich $2 \cdot 16 = 32$ ist.

Es hat demnach A $\frac{160-2}{2}+2 = 81$ rthlr. vor
a Spiele gehabt.

Nachdem ferner B verloren und einen Rest übrig
halten hat, ist ihm dieser Rest von C, D und E, auf
eselbe Art wie bei A, nach und nach verdoppelt, d. h.
ieser Rest ist mit $2^3 = 8$ multiplicirt worden. Da er
nun am Ende des Spiels 32 rthlr. hat, so muß der
Rest $= 4$ seyn, weil nämlich $4 \cdot 8 = 32$ ist. Es besitzt also B, bevor er verliert, und nachdem ihm sein Geld
von A verdoppelt worden, $\frac{160-4}{2}+4 = 82$, und
folglich zu Anfange des Spiels $\frac{82}{2} = 41$ rthlr.

Nun spielt C, verliert und behält einen Rest
übrig. Dieser Rest giebt mit $2^2 = 4$ multiplicirt 32,
er muß also $= 8$ seyn. Es besitzt daher C, bevor er
verliert, und nachdem ihm sein Geld von A und B um
4mal vermehrt worden ist, $\frac{160-8}{2}+8 = 84$ rthlr.,
und folglich zu Anfange des Spiels $\frac{84}{4} = 21$ rthlr.

Auf eine ähnliche Art findet man, daß der Rest
von D $= 16$ ist, und daß dasjenige, was er besitzt,
bevor er verliert, und nachdem ihm sein Geld von A,
B und C um 8mal vermehrt worden ist, $\frac{160-16}{2}$
$+16 = 88$ beträgt, und daß also sein anfängliches
Geld $\frac{88}{8} = 11$ rthlr. ist.

S

Was endlich E betrifft, so findet man sein anfängliches Geld $= 160 - (81 + 41 + 21 + 11) = 6$ rthlr.

68.

Das erste Regiment sey x Mann, das zweite y Mann, das dritte z Mann stark. Erhält nun das erste Regiment auf einen Mann einen Thaler, so beträgt dieses x rthlr.; auf das zweite $\frac{y}{2}$ rthlr.; und auf das dritte $\frac{z}{2}$ rthlr. Es ist daher

$$x + \frac{y}{2} + \frac{z}{2} = 2652$$

oder I. $2x + y + z = 5304$

Wird dieser Thaler dem zweiten Regiment zuerkannt, so ist

$$\frac{x}{3} + y + \frac{z}{3} = 2652$$

oder II. $x + 3y + z = 7956$

Wird er endlich dem dritten zuerkannt, so ist

$$\frac{x}{4} + \frac{y}{4} + z = 2652$$

oder III. $x + y + 4z = 10608$

Subtrahirt man (I.) von (II.), so bleibt

IV. $2y - x = 2652$

Multiplicirt man (I.) mit 4, und subtrahirt davon (III.), so bleibt

V. $7x + 3y = 10608$

Multiplicirt man ferner (IV.) mit 7, addirt diese Gleichung zu (V.) und bestimmt y, so findet man

$y = 1716$ Mann, Stärke des zweiten Regim.

und also $x = 780$ Mann, Stärke des ersten Regim.

$z = 2028$ Mann, Stärke des dritten Regim.

69.

Die drei gesuchten Zahlen seyen x, y, z.

Man setze $x + y + z = S$, so ist nach der Aufgabe

$x + m(S - x) = a$, folgl. I. $x = \frac{a - mS}{1 - m}$

$y + m'(S - y) = a'$, folgl. II. $y = \frac{a' - m'S}{1 - m'}$

$z + m''(S - z) = a''$, folgl. III. $z = \frac{a'' - m''S}{1 - m''}$

Es ist demnach

$$S = \frac{a - mS}{1 - m} + \frac{a' - m'S}{1 - m'} + \frac{a'' - m''S}{1 - m''}$$

$$= \frac{a}{1-m} - \frac{mS}{1-m} + \frac{a'}{1-m'} - \frac{m'S}{1-m'} + \frac{a''}{1-m''} - \frac{m''S}{1-m''}$$

$$= \frac{a}{1-m} + \frac{a'}{1-m'} + \frac{a''}{1-m''} - S\left(\frac{m}{1-m} + \frac{m'}{1-m'} + \frac{m''}{1-m''}\right)$$

oder $\left(1 + \frac{m}{1 - m} + \frac{m'}{1 - m'} + \frac{m''}{1 - m''}\right) S$

$$= \frac{a}{1 - m} + \frac{a'}{1 - m'} + \frac{a''}{1 - m''}$$

folgl. $$S = \frac{\frac{a}{1 - m} + \frac{a'}{1 - m'} + \frac{a''}{1 - m''}}{1 + \frac{m}{1 - m} + \frac{m'}{1 - m'} + \frac{m''}{1 - m''}}$$

Setzt man nun $\frac{m}{1-m}+\frac{m'}{1-m'}+\frac{m''}{1-m''}=A$

und $\frac{a}{1-m}+\frac{a'}{1-m'}+\frac{a''}{1-m''}=B$

so ist $S=\frac{B}{1+A}$

Diesen gefundenen Werth von S substituire man in I. II. III., so ist

$$x=\frac{a-m\frac{B}{1+A}}{1-m}=\frac{1}{1-m}\left(a-\frac{mB}{1+A}\right)$$

$$y=\frac{a'-m'\frac{B}{1+A}}{1-m'}=\frac{1}{1-m'}\left(a'-\frac{m'B}{1+A}\right)$$

$$z=\frac{a''-m''\frac{B}{1+A}}{1-m''}=\frac{1}{1-m''}\left(a''-\frac{m''B}{1+A}\right) \text{*)}$$

70.

Man behandle die Auflösung genau so wie die vorhergehende, so wird man ohne Schwierigkeit das verlangte Resultat finden.

---

*) Die hier gefundenen Ausdrücke für S, x, y und z haben zwar die entgegengesetzten Zeichen von denen, die der Herr Verfasser der Beispielsammlung angegeben hat, beide Auflösungen liefern jedoch ein ganz gleiches Resultat, da bekanntlich der Zähler und Nenner eines Bruches jedesmal mit — 1 multiplicirt werden kann, wodurch zwar die Zeichen verwandelt werden, der Werth des Bruches aber ungeändert bleibt. Die hier angesetzten Zeichen fließen unmittelbar aus der Aufgabe, weshalb sie auch den Vorzug vor den entgegengesetzten Zeichen verdienen.

71.

Die drei Zahlen seyen x, y und z, so ist

$$\text{I. } x + y + z = 83$$

Ferner ist $x - 7 : y - 7 = 5 : 3$

also $3x - 21 = 5y - 35$, oder II. $5y - 3x = 14$

ferner $y - 3 : z - 3 = 11 : 9$

also $9y - 27 = 11z - 33$, oder III. $11z - 9y = 6$

Multiplicirt man nun (I.) mit 3 und addirt zu dieser Gleichung (II.), so ist

$$\text{IV. } 8y + 3z = 263$$

Multiplicirt man ferner (III.) mit 8, (IV.) mit 9, addirt beide Gleichungen und bestimmt z, so findet man

$$z = 21$$

und also $x = 37$

$$y = 25$$

72.

Die drei Zahlen seyen x, y und z, so ist

$$x + 6 : y + 6 = 2 : 3$$

also $3x + 18 = 2y + 12$, oder I. $2y - 3x = 6$

Ferner ist $x + 5 : z + 5 = 7 : 11$

also $11x + 55 = 7z + 35$, oder II. $7z - 11x = 20$

Ferner $y - 36 : z - 36 = 6 : 7$

also $7y - 252 = 6z - 216$

oder III. $6z - 7y = -36$

Multiplicirt man (I.) mit 11 und (II.) mit 3 und ziehet letztere von der erstern ab, so bleibt

$$\text{IV. } 22y - 21z = 6$$

Multiplicirt man ferner (III.) mit 7 und (IV.) mit 2, addirt beide Gleichungen und bestimmt y, so findet man

$$y = 48$$
und also $x = 30$
$$z = 50$$

73.

Die Ziffer in der Stelle der Einer sey x, die in der Stelle der Zehner y, die in der Stelle der Hunderte z. Da nun diese drei Ziffern eine arithmetische Proportion bilden sollen, so ist

$$x - y = y - z$$

also $x + z = 2y$, oder I. $x + z - 2y = 0$

Ferner hat die gesuchte Zahl die Form

$$x + 10y + 100z$$

Da nun die Zahl durch die Summe der Ziffern dividirt zum Quotienten 48 geben soll, so ist

$$\frac{x + 10y + 100z}{x + y + z} = 48$$

oder II. $47x + 38y - 52z = 0$

Ziehet man endlich von der gesuchten Zahl 198 ab, so soll man eine Zahl erhalten, welche die nämlichen Ziffern als die gesuchten in umgekehrter Ordnung enthält. Es ist demnach

$$x + 10y + 100z - 198 = z + 10y + 100x$$

also $99x - 99z = - 198$, oder III. $x - z = - 2$

Multiplicirt man (I.) mit 19 und addirt die Gleichung zu (II.), so ist, wenn durch 33 dividirt wird,

$$2x - z = 0$$

Subtrahirt man hiervon die Gleichung (III.), so findet man unmittelbar

$x = 2$ in der Stelle der Einer
und also $z = 4$ in der Stelle der Hunderte
und $y = 3$ in der Stelle der Zehner.

Die gesuchte Zahl ist also $= 432$.

VIII.

Auflösungen der Aufgaben für die Gleichungen des zweiten Grades mit einer und mit mehreren unbekannten Größen.

(Zu M. Hirsch Sammlung von Beispielen ꝛc. XVII. Kapitel, von S. 224 bis S. 244.)

1.

Die Zahl sey = x, so ist

$$\frac{x}{2} \cdot \frac{x}{3} = 864$$

also $x^2 = 5184$

folgl. $x = 72$

2.

Die Zahl sey = x, so ist

$$\frac{\frac{x}{7} \cdot \frac{x}{8}}{3} = 298\frac{2}{3}$$

also $x^2 = 50176$

folgl. $x = 224$

3.

Die Zahl sey x, so ist

$$(94 + x) \cdot (94 - x) = 8512$$

$$\text{oder } 8836 - x^2 = 8512$$
$$\text{folgl. } x = 18$$

4.

Die Zahlen seyen x und y, so ist

$$\text{I. } xy = 750$$
$$\text{II. } \frac{x}{y} = 3\tfrac{1}{3}$$

Aus (II.) ergiebt sich $x = 3\tfrac{1}{3}y$
Substituirt man diesen Werth für x in (I.), so erhält man

$$3\tfrac{1}{3}y^2 = 750$$
$$\text{folgl. } y = 15$$
$$\text{und also } x = 50$$

5.

Die beiden Zahlen seyen x und y, so ist

$$\text{I. } xy = a$$
$$\text{II. } \frac{x}{y} = b$$

Entwickelt man x aus (II.) und substituirt den gefundenen Werth in (I.), so erhält man

$$by^2 = a$$
$$\text{folgl. } y = \sqrt{\frac{a}{b}}$$

Den Werth für y in (II.) gesetzt und entwickelt, giebt

$$x = b\sqrt{\frac{a}{b}} = \sqrt{\frac{ab^2}{b}} = \sqrt{ab}$$

6.

Die beiden Zahlen seyen x und y, so ist

$$\text{I.}\quad x^2 + y^2 = 13001$$
$$\text{II.}\quad x^2 - y^2 = 1449$$

Addirt man beide Gleichungen, so ist

$$2x^2 = 14450$$

folgl. $x = 85$

Subtrahirt man (II.) von (I.), so ist

$$2y^2 = 11552$$

folgl. $y = 76$

7.

Die Zahlen seyen x und y, so ist

$$\text{I.}\quad x^2 + y^2 = a$$
$$\text{II.}\quad x^2 - y^2 = b$$

Subtrahirt man (II.) von (I.) und bestimmt y, so findet man

$$y = \sqrt{\frac{a-b}{2}}$$

Addirt man (II.) und (I.) und bestimmt x, so findet man

$$x = \sqrt{\frac{a+b}{2}}$$

8.

Die gesuchten Zahlen seyen x und y, so ist

$x : y = 3 : 4$, also I. $4x = 3y$

ferner ist II. $x^2 + y^2 = 324900$

Entwickelt man x aus (I.) und substituirt den dafür gefundenen Werth in (II.), so erhält man

$$\frac{25y^2}{16} = 324900$$

folgl. $y = 456$ 2c.

9.

Wenn x und y die gesuchten Zahlen sind, so ist

$x : y = m : n$, also I. $nx = my$

ferner II. $x^2 + y^2 = b$

Entwickelt man x aus (I.) und substituirt den Werth in (II.), so ergiebt sich $(m^2 + n^2)\, y^2 = bn^2$

folgl. $y^2 = \frac{bn^2}{m^2+n^2}$ und also $y = \frac{n\sqrt{b}}{\sqrt{(m^2+n^2)}}$ 2c.

10.

Verfährt man hier eben so wie in der vorigen Auflösung, so erhält man

$$(m^2 - n^2)\, y^2 = bn^2$$

$$\text{folgl. } y = \frac{n\sqrt{b}}{\sqrt{(m^2 - n^2)}}$$

11.

Das Kapital sey $= x$ rthlr. Nun tragen x rthlr. in einem Jahre zu 4 Procent $\frac{x}{25}$ rthlr. Interessen, folglich in einem Monat $\frac{1}{12} \cdot \frac{x}{25}$ und in 5 Monaten $\frac{5}{12} \cdot \frac{x}{25} = \frac{x}{60}$ rthlr. Multiplicirt man diese Interessen mit dem Kapitale, so erhält man $\frac{x^2}{60}$. Es ist demnach

$$\frac{x^2}{60} = 117041\tfrac{2}{3}$$

folgl. $x = 2650$ rthlr. Kapital.

12.

Er habe von der ersten Sorte x Pf., so hat er von der zweiten $\frac{4x}{3}$ Pf. und von der dritten $\frac{7}{2} \cdot \frac{4x}{3} = \frac{14x}{3}$ Pf. Da nun das Pfund von der ersten Sorte x gr. kostet, so kosten x Pf. x^2 gr.; eben so kostet das Pf. von der zweiten Sorte $\frac{4x}{3}$ gr., folglich kosten $\frac{4x}{3}$ Pf. $\frac{16x^2}{9}$ gr. Auf eine ähnliche Art findet man, daß die $\frac{14x}{3}$ Pf. von der dritten Sorte $\frac{196x^2}{9}$ gr. kosten. Es ist demnach

$$x^2 + \frac{16x^2}{9} + \frac{196x^2}{9} = 5525$$

folgl. $x = 15$ Pf. von der ersten Sorte
hieraus folgt 20 Pf. von der zweiten Sorte
und 70 Pf. von der dritten Sorte.

13.

Er habe x Pf. vorräthig. Verkauft er das Pf. zu $2\frac{3}{5}x$ gr. $= \frac{13x}{5}$, so erhält er für x Pf. $x \cdot \frac{13x}{5}$ gr. $= \frac{13x^2}{5}$ gr. Verkauft er aber das Pf. für $\frac{x}{2}$ gr., so erhält er für x Pf. $\frac{x^2}{2}$ gr. Nun beträgt, nach der

Aufgabe, $\frac{13x^2}{5}$ eben so viel über 155 gr. als $\frac{x^2}{2}$ weniger wie 155 gr. beträgt. Es ist demnach

$$\frac{13x^2}{5} - 155 = 155 - \frac{x^2}{2}$$

folgl. $x = 10$ Pfund.

14.

Die Zahl sey x, so ist

$$\frac{\left(\frac{7x}{3} + 7\right)8x}{14} - 4x = 2352$$

oder $$\frac{\frac{56x^2}{3} + 56x - 56x}{14} = \frac{4x^2}{3} = 2352$$

folgl. $x = 42$

15.

Die gesuchten Zahlen seyen x, y, z, so ist

I. $xy = a$, II. $xz = b$, III. $y^2 + z^2 = c$

Man entwickele y aus (I.) und z aus (II.) und setze das Quadrat der beiden Werthe in (III.), so erhält man

$$\frac{a^2}{x^2} + \frac{b^2}{x^2} = \frac{a^2 + b^2}{x^2} = c$$

folgl. $x = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{c}}$

Substituirt man diesen Werth in (I.), so ist

$$y\sqrt{\frac{a^2 + b^2}{c}} = a$$

$$\text{folgl. } y = \frac{a}{\sqrt{\frac{a^2+b^2}{c}}} = \frac{a}{\frac{\sqrt{(a^2+b^2)}}{\sqrt{c}}}$$

$$= \frac{a\sqrt{c}}{\sqrt{(a^2+b^2)}} = a\sqrt{\frac{c}{a^2+b^2}} \text{ rc.}$$

16.

Sind die gesuchten Zahlen x, y und z, so ist

$$\text{I. } \frac{xy}{z} = a, \text{ II. } \frac{xz}{y} = b, \text{ III. } \frac{yz}{x} = c$$

Man entwickele x aus (III.) und substituire den Werth in (I.), so erhält man $\frac{\frac{yz}{c}\,y}{z} = a$

$$\text{oder } \frac{y^2z}{cz} = a, \text{ folgl. } y = \sqrt{ac}$$

Ferner setze man denselben Werth von x in (II.), so ergiebt sich $\frac{\frac{yz}{c}\,z}{y} = b$

$$\text{oder } \frac{yz^2}{cy} = b, \text{ folglich } z = \sqrt{bc}$$

Endlich entwickele man y aus (II.) und setze den Werth in (I.), so giebt dieser $\frac{\frac{xz}{b}\,x}{z} = a$

$$\text{oder } \frac{x^2z}{bz} = a, \text{ folgl. } x = \sqrt{ab}$$

17.

Die Zahlen seyen x, y und z. Es ist also

$$\text{I. } xy = a, \text{ II. } yz = b, \text{ III. } xz = c$$

Aus (II.) entwickele man y, und aus (III.) entwickele man x. Diese beiden Werthe setze man in (I.), so ist

$$\frac{bc}{z^2} = a,\ \text{folgl. } z = \sqrt{\frac{bc}{a}}$$

Ferner entwickele man y aus (I.) und z aus (III.) und setze die Werthe in (II.), so erhält man

$$\frac{ac}{x^2} = b,\ \text{folgl. } x = \sqrt{\frac{ac}{b}}$$

Entwickelt man endlich x aus (I.) und z aus (II.) und substituirt diese Werthe in (III.), so giebt dieses

$$\frac{ab}{y^2} = c,\ \text{folgl. } y = \sqrt{\frac{ab}{c}}$$

18.

Wenn die gesuchten 5 Zahlen x, y, z, u, w sind, so ist

$$\text{I. } xy = a,\ \text{II. } yz = b,\ \text{III. } zu = c$$
$$\text{IV. } uw = d,\ \text{V. } wx = e$$

Man multiplicire diese 5 Gleichungen mit einander, so erhält man

$$x^2y^2z^2u^2w^2 = abcde$$
$$\text{oder VI. } xyzuw = \sqrt{abcde}$$

Multiplicirt man die Gleichungen (I.) und (III.) und dividirt die hieraus entstehende Gleichung in (VI.), so erhält man

$$w = \frac{\sqrt{abcde}}{ac} = \sqrt{\frac{abcde}{a^2c^2}} = \sqrt{\frac{bde}{ac}}$$

Multiplicirt man (II.) und (IV.) und dividirt in (VI.), so ist

$$x = \frac{\sqrt{abcde}}{bd} = \sqrt{\frac{abcde}{b^2d^2}} = \sqrt{\frac{ace}{bd}}$$

Multiplicirt man (III.) und (V.) und dividirt in (VI.), so ist

$$y = \frac{\sqrt{abcde}}{ce} = \sqrt{\frac{abcde}{c^2e^2}} = \sqrt{\frac{abd}{ce}}$$

Multiplicirt man (I.) und (IV.) und dividirt in (VI.), so ist

$$z = \frac{\sqrt{abcde}}{ad} = \sqrt{\frac{abcde}{a^2d^2}} = \sqrt{\frac{bce}{ad}}$$

Multiplicirt man endlich (II.) und (V.) und dividirt in (VI.), so ist

$$u = \frac{\sqrt{abcde}}{be} = \sqrt{\frac{abcde}{b^2e^2}} = \sqrt{\frac{acd}{be}} \text{ *)}$$

19.

Die 7 Zahlen seyen x, y, z, t, u, v, w, so erhält man auf eine ähnliche Art wie in der vorigen Aufgabe 7 Gleichungen. Diese multiplicirt man mit einander, und ziehet aus beiden Seiten die Quadratwurzel, wodurch man die 8te Gleichung erhält. Nun multiplicirt man (II.) mit (IV.) und mit (VI.)

(III.) mit (V.) und mit (VII.)
(I.) mit (IV.) und mit (VI.)
(II.) mit (V.) und mit (VII.)
(I.) mit (III.) und mit (VI.)
(II.) mit (IV.) und mit (VII.)
(I.) mit (III.) und mit (V.)

---

*) Die Aufgabe Nr. 17 läßt sich ebenfalls wie die gegenwärtige behandeln.

Mit diesen 7 Producten dividirt man nach und nach in die 8te Gleichung, wodurch man den Werth für die 7 unbekannten Größen erhält.

20.

Die beiden Zahlen seyen x und y, so ist

$$\text{I.}\quad x - y = 8$$

$$\text{und II.}\quad xy = 240$$

Diese Gleichungen lassen sich eben so wie die in Abschn. IV. §. 2 S. 97 behandeln; denn da die Differenz von x und y gegeben ist, so braucht man nur ihre Summe zu finden. Man erhebe daher beide Theile der Gleichung (I.) zum Quadrat und multiplicire (II.) mit 4, so ist

$$\text{III.}\quad x^2 - 2xy + y^2 = 64$$

$$\text{IV.}\quad 4xy = 960$$

Addirt man beide Gleichungen, so erhält man

$$x^2 + 2xy + y^2 = 1024$$

$$\text{oder V.}\quad x + y = 32$$

Addirt man also (I.) und (V.) und bestimmt x, so findet man

$$x = 20$$

Subtrahirt man aber (I.) von (V.) und bestimmt y, so findet man

$$y = 12$$

21.

Die Auflösung dieser Aufgabe befindet sich bereits in Abschn. IV. §. 2. S. 96; sie ist daher hier weggeblieben.

22.

Die Zahl sey = x, so ist

$$x^2 - x = 306$$

folgl. $x = \frac{1}{2} + \sqrt{(\frac{1}{4} + 306)} = 18$

23.

Die Zahl sey x, so ist

$$\frac{x}{3} \cdot \frac{x}{4} + 5x - 200 = 280 - x$$

oder $x^2 + 72x = 5760$

folgl. $x = -\frac{72}{2} + \sqrt{\left[\left(\frac{72}{2}\right)^2 + 5760\right]} = 48$

24.

Er sey x Jahr alt, folglich ist seine Mutter x + 20 Jahr alt. Es ist demnach

$$(x + 20)\, x - 2500 = 2x + 20$$

oder $x^2 + 18x = 2520$

folgl. $x = -\frac{18}{2} + \sqrt{\left[\left(\frac{18}{2}\right)^2 + 2520\right]} = 42$ Jahre.

25.

Die erste Sorte wiege x Pfund und die zweite y Pfund, so ist

$$x : y = 4 : 3$$

also $3x = 4y$ oder I. $3x - 4y = 0$

Nun kostet das Pfund der ersten Sorte $\frac{x}{2}$ gr., folglich kosten x Pf. $x \cdot \frac{x}{2} = \frac{x^2}{2}$ gr. Das Pfund der zwei-

ten Sorte kostet $\frac{x}{2} - 6$ gr., also kosten y Pfund $y\left(\frac{x}{2} - 6\right) = \frac{xy - 12y}{2}$. Es ist daher

$$\frac{x^2}{2} + \frac{xy - 12y}{2} = 5240 \text{ gr.}$$

oder II. $x^2 + xy - 12y = 10480$

Aus (I.) ergiebt sich $x = \frac{4y}{3}$. Substituirt man diesen Werth von x in (II.), so erhält man

$$\frac{16y^2}{9} + \frac{4y^2}{3} - 12y = 10480$$

$$\text{oder } y^2 - \frac{27y}{7} = \frac{23580}{7}$$

$$\text{folgl. } y = \frac{27}{14} + \sqrt{\left[\left(\frac{27}{14}\right)^2 + \frac{23580}{7}\right]}$$

$= \frac{27}{14} + \sqrt{\frac{660969}{14^2}} = 60$ Pf. Gewicht der zweiten Sorte.

Diesen Werth von y in (I.) substituirt, giebt
$x = 80$ Pf. Gewicht der ersten Sorte.

26.

Das erste Stück halte x Ellen, so hält das zweite $x + 3$ und das dritte $x + 5$ Ellen. Da nun die Elle des ersten x gr. kostet, so kosten x Ellen x^2 gr. Die Elle des zweiten kostet $x + 10$ gr., folglich kosten $x + 3$ Ellen $(x + 3)(x + 10) = x^2 + 13x + 30$ gr. Die Elle des dritten kostet $x + 20$ gr.,

es kosten also x + 5 Ellen $(x + 5)(x + 20) = x^2 + 25x + 100$ gr. Es ist demnach

$$x^2 + x^2 + 13x + 30 + x^2 + 25x + 100 = 9530$$

oder $3x^2 + 38x = 9400$

also $x^2 + \frac{38x}{3} = \frac{9400}{3}$

folgl. $x = -\frac{19}{3} + \sqrt{\left[\left(\frac{19}{3}\right)^2 + \frac{9400}{3}\right]}$

$= -\frac{19}{3} + \sqrt{\frac{28561}{3^2}}$

= 50 Ellen Länge des ersten Stückes.

27.

Das Vermögen des A sey = x. Nun besitzt B so oft 9 rthlr. als A 5 rthlr. hat. Es ist aber 5 rthlr. in x $\frac{x}{5}$ mal enthalten, folglich besitzt B $\frac{9x}{5}$ rthlr. Ferner hat C so oft 10 rthlr. als A 5 rthlr. besitzt; es ist daher das Vermögen des C = $\frac{10x}{5} = 2x$ rthlr. Multiplicirt man das Vermögen von A und B, so erhält man $\frac{9x^2}{5}$. Multiplicirt man das Vermögen von B und C, so giebt dieses $\frac{18x^2}{5}$. Addirt man ferner das Vermögen von A, B und C, so erhält man $\frac{24x}{5}$. Es ist daher, nach der Aufgabe,

$$\frac{9x^2}{5} + \frac{18x^2}{5} + \frac{24x}{5} = 8832$$

oder $9x^2 + 8x = 14720$

also $x^2 + \frac{8x}{9} = \frac{14720}{9}$

$$\text{folgl. } x = -\frac{4}{9} + \sqrt{\left[\left(\frac{4}{9}\right)^2 + \frac{14720}{9}\right]}$$

$$= -\frac{4}{9} + \sqrt{\frac{132496}{9^2}}$$

= 40 rthlr. Vermögen des A
hieraus ergiebt sich 72 rthlr. Vermögen des B
und 80 rthlr. Vermögen des C

28.

Er habe x Tücher gekauft. Da nun x Tücher 60 rthlr. gekostet haben, so kostet ein Tuch $\frac{60}{x}$ rthlr. Hätte er drei Tücher mehr bekommen, so wären es $x + 3$ Tücher gewesen, und da diese ebenfalls 60 rthlr. gekostet hätten, so würde ein Tuch $\frac{60}{x+3}$ gekostet haben. Der letztere Preis eines Tuches soll aber um einen Thaler wohlfeiler seyn als der vorhergehende. Es ist demnach

$$\frac{60}{x} = \frac{60}{x+3} + 1$$

$$\text{oder } x^2 + 3x = 180$$

$$\text{folgl. } x = -\tfrac{3}{2} + \sqrt{[(\tfrac{3}{2})^2 + 180]} = 12 \text{ Tücher.}$$

29.

Es mögen anfänglich x Armen gewesen seyn; es kömmt daher auf einen jeden $\frac{36}{x}$ rthlr. Sind es aber nur $x - 6$ Armen, so kömmt auf jeden $\frac{36}{x-6}$. Nun

bekömmt im letztern Falle jeder Arme $\frac{1}{12}$ rthlr. mehr als im erstern Falle; es ist demnach

$$\frac{36}{x} + \frac{1}{12} = \frac{36}{x - 6}$$

$$\text{oder } x^2 - 6x = 2592x$$

$$\text{folgl. } x = 3 + \sqrt{(3^2 + 2592)} = 54 \text{ Armen.}$$

30.

Es habe bei seinem Tode x Kinder. Es kömmt daher auf jedes Kind $\frac{46800}{x}$. Nach dem Tode der beiden Kinder bleiben noch $x - 2$ übrig, und alsdann bekömmt ein jedes $\frac{46800}{x - 2}$. Nun bekömmt im letztern Falle ein jedes Kind 1950 rthlr. mehr als im erstern Falle; es ist demnach

$$\frac{46800}{x} + 1950 = \frac{46800}{x - 2}$$

$$\text{oder } x^2 - 2x = 48$$

$$\text{folgl. } x = 1 + \sqrt{(1 + 48)} = 8 \text{ Kinder.}$$

31.

Ist die gesuchte Zahl $= x$, so ist

$$\frac{c}{x} - \frac{c}{x + a} = d$$

$$\text{oder } (x^2 + ax)\, d = cx + ac - cx$$

$$\text{also } x^2 + ax = \frac{ac}{d}$$

$$\text{folgl. } x = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{a^2}{4} + \frac{ac}{d}\right)}$$

32.

Die Anzahl der Männer sey = x, so ist die Anzahl der Weiber 20 — x. Da nun die Männer zusammen 24 rthlr. verzehren, so verzehrt jeder einzelne $\frac{24}{x}$, und aus demselben Grunde verzehrt jedes Weib $\frac{24}{20-x}$. Nun verzehrt ein jeder Mann einen Thaler mehr als jede Frau; es ist demnach

$$\frac{24}{x} = \frac{24}{20-x} + 1$$

$$\text{oder } x^2 - 68x = -480$$

folgl. $x = 34 - \sqrt{(34^2 - 480)} = 8$ *) Männer, hieraus ergiebt sich die Anzahl der Weiber $= 20 - 8 = 12$.

33.

Er habe für das Pferd x rthlr. gegeben. Nun gewinnt er beim Verkauf x Procent, d. h. an jede 100 rthlr., die ihm das Pferd gekostet hat, gewinnt er x rthlr., folglich gewinnt er an die x rthlr., die er bezahlt hat, $\frac{x^2}{100}$ rthlr., und also beträgt die Summe, für welche er das Pferd verkauft hat, $x + \frac{x^2}{100}$. Es ist demnach

*) Hier ist die Quadratwurzel negativ genommen worden, weil man im entgegengesetzten Falle $x = 60$, und folglich für die Anzahl der Weiber $20 - 60 = -40$ erhalten hätte; welcher negative Werth hier nicht anwendbar ist.

$$\frac{x^2}{100} + x = 144$$

oder $x^2 + 100x = 14400$

folgl. $x = -50 + \sqrt{(50^2 + 14400)}$
$= 80$ rthlr. Einkaufspreis.

34.

Der Einkaufspreis betrage x rthlr. Nun kostet ihm der Transport 4 Procent, dieses macht auf x rthlr. $\frac{4x}{100} = \frac{x}{25}$; das Zeug hat also $x + \frac{x}{25} = \frac{26x}{25}$ rthlr. gekostet. Er verkauft die Waare und gewinnt dabei $\frac{x}{12}$ Procent, d. h. an 100 rthlr. gewinnt er $\frac{x}{12}$ rthlr.; folglich gewinnt er an $\frac{26x}{25}$ rthlr. $\frac{x}{100 \cdot 12} \cdot \frac{26x}{25} = \frac{13x^2}{15000}$, und also beträgt die Summe, für welche er die Waare verkauft hat, $\frac{26x}{25} + \frac{13x^2}{15000}$. Es ist daher

$$\frac{13x^2}{15000} + \frac{26x}{25} = 390$$

oder $x^2 + 1200x = 450000$

folgl. $x = -600 + \sqrt{(600^2 + 450000)}$
$= 300$ rthlr. Einkaufspreis.

35.

Die erste habe x, die zweite 140 — x Eier gehabt. Nun spricht die erste zur zweiten: hätte ich 140 — x Eier gehabt, so würde ich 30 gr. daraus gelöset haben;

die erste verkauft also jedes Ei zu $\frac{30}{140-x}$ gr. und folglich löset sie für ihre x Eier $\frac{30x}{140-x}$ gr. Die zweite spricht: hätte ich x Eier gehabt, so würde ich $53\frac{1}{3}$ gr. daraus gelöset haben; die zweite verkauft also jedes Ei zu $\frac{53\frac{1}{3}}{x} = \frac{160}{3x}$ gr., und folgl. löset sie für ihre $140-x$ Eier $\frac{160\,(140-x)}{3x}$ gr. Sie haben, nach der Aufgabe, beide gleich viel gelöset; es ist demnach

$$\frac{30x}{140-x} = \frac{160\,(140-x)}{3x}$$

also $90x^2 = 160\,(140-x)^2$

oder $70x^2 - 44800x = -3136000$

$x^2 - 640x = -44800$

folgl. $x = 320 - \sqrt{(320^2 - 44800)}$ *)

$= 80$ Eier für die erste Bäuerin,

und also $y = 140 - 80 = 60$ Eier für die zweite Bäuerin.

36.

Der erste habe x, der zweite $x+3$ Ellen verkauft. Der erste spricht: aus $x+3$ Ellen würde ich 24 rthlr. gelöset haben; er verkauft also die Elle Zeug zu $\frac{24}{x+3}$ rthlr., und folglich löset er für seine x Ellen $\frac{24x}{x+3}$ rthlr. Der zweite spricht: für x El-

*) Siehe Anmerkung zur 32sten Auflösung S. 295.

len würde ich $12\frac{1}{2}$ rthlr. lösen; er verkauft also die Elle Zeug zu $\frac{12\frac{1}{2}}{x} = \frac{25}{2x}$ rthlr., und folglich löset er für seine $x + 3$ Ellen $\frac{25(x+3)}{2x}$ rthlr. Nach der Aufgabe lösen sie zusammen 35 rthlr.; es ist daher

$$\frac{24x}{x+3} + \frac{25(x+3)}{2x} = 35$$

also $48x^2 + 25(x+3)^2 = 70x^2 + 210x$

oder $3x^2 - 60x = -225$

$x^2 - 20x = -75$

folgl. $x = 10 \pm \sqrt{(10^2 - 75)}$ *)

$= 15$ Ellen für den ersten

und also 18 Ellen für den zweiten;

oder auch 5 Ellen für den ersten

und also 8 Ellen für den zweiten.

37.

Als sich A und B begegnen, habe B x und also A $x + 30$ Meilen zurückgelegt. A ist daher vom Orte D x Meilen entfernt, und wird in vier Tagen dort anlangen. Da er nun x Meilen in vier Tagen macht, so macht er eine Meile in $\frac{4}{x}$ Tagen; folglich hat er über die bereits zurückgelegten $x + 30$ Meilen $\frac{4(x+30)}{x}$ Tage zugebracht. B ist vom Orte C

---

*) Hier erhält man zwei Werthe für x, weil im gegenwärtigen Falle sowohl die positive als negative Quadratwurzel anwendbar ist.

$x + 30$ Meilen entfernt, und wird in neun Tagen dort anlangen: da er also $x + 30$ Meilen in neun Tagen macht, so macht er eine Meile in $\frac{9}{x + 30}$ Tagen; folglich hat er über die bereits zurückgelegten x Meilen $\frac{9x}{x + 30}$ Tage zugebracht. Da sie nun beide zu gleicher Zeit von C und D ausgegangen sind, so haben sie eine gleiche Zeit auf die zurückgelegten Wege verwendet. Es ist demnach

$$\frac{4\,(x + 30)}{x} = \frac{9x}{x + 30}$$

also $4\,(x + 30)^2 = 9x^2$

oder $x^2 - 48x = 720$

folgl. $x = 24 + \sqrt{(24^2 + 720)}$

$= 60$ Meilen, die B zurückgelegt hat,

mithin hat A 90 Meilen zurückgelegt.

Folglich ist die Entfernung von C und D

$= 60 + 90 = 150$ Meilen.

Anmerk. Dieses Resultat kann man auf eine kürzere Art erhalten, wenn man aus beiden Theilen der Gleichung $4\,(x + 30)^2 = 9x^2$ die Quadratwurzel ziehet. Dieses giebt nämlich

$$2\,(x + 30) = 3x$$

folgl. $x = 60$ rc.

38.

Verfährt man hier so wie in der vorigen Auflösung, so erhält man die Gleichung

$$a\,(x + d)^2 = bx^2$$

Ziehet man aus beiden Theilen dieser Gleichung die Quadratwurzel, so erhält man

$$(x + d) \sqrt{a} = x\sqrt{b}$$

oder $x (\sqrt{b} - \sqrt{a}) = d\sqrt{a}$

folgl. $x = \frac{d\sqrt{a}}{\sqrt{b} - \sqrt{a}}$ der Weg, den B gemacht hat. Nun ist der Weg, den A zurückgelegt hat, $= x + d$

$$= \frac{d\sqrt{a}}{\sqrt{b} - \sqrt{a}} + d = \frac{d\sqrt{a} + d\sqrt{b} - d\sqrt{a}}{\sqrt{b} - \sqrt{a}}$$

$= \frac{d\sqrt{b}}{\sqrt{b} - \sqrt{a}}$. Es ist demnach die Entfernung von C und D $= x + (x + d)$

$$= \frac{d\sqrt{a}}{\sqrt{b} - \sqrt{a}} + \frac{d\sqrt{b}}{\sqrt{b} - \sqrt{a}} = \frac{d(\sqrt{b} + \sqrt{a})}{\sqrt{b} - \sqrt{a}}$$

39.

Der erste habe x rthlr. und also der zweite 500 — x rthlr. gelegt. Nun hat der erste an Kapital und Gewinnst 450 rthlr. zurück erhalten; er gewinnt also in 5 Monaten an x rthlr. 450 — x, und folglich beträgt der Gewinnst von einem Thaler in einem Monat $\frac{450 - x}{5x}$ rthlr. Ferner gewinnt der zweite in zwei Monaten an 500 — x rthlr. 450 — (500 — x) = x — 50 rthlr., folglich beträgt der Gewinnst von einem Thaler in einem Monat $\frac{x - 50}{2 \cdot (500 - x)}$ rthlr. Da nun die Kapitalien beider Kaufleute gleiche Procente tragen, so ist

$$\frac{450 - x}{5x} = \frac{x - 50}{2\,(500 - x)}$$

also $2x^2 - 1900x + 450000 = 5x^2 - 250x$

oder $x^2 + 550x = 150000$

folgl. $x = -275 + \sqrt{(275^2 + 150000)}$

$= 200$ rthlr. Einlage des ersten

und also ist 300 rthlr. die Einlage des andern.

40.

Der erste habe x rthlr. und also der zweite $2000 - x$ rthlr. gelegt. Nun hat der erste an Kapital und Gewinnst 1710 rthlr. zurück erhalten; er gewinnt also an x rthlr. in 17 Monaten $1710 - x$ rthlr., folglich beträgt der Gewinnst von einem Thaler in einem Monat $\frac{1710 - x}{17x}$. Ferner gewinnt der zweite an $2000 - x$ rthlr. in 12 Monaten $1040 - (2000 - x) = x - 960$ rthlr., folglich beträgt der Gewinnst von einem Thaler in einem Monat $\frac{x - 960}{12\,(2000 - x)}$ rthlr. Da nun die Kapitalien beider Kaufleute gleiche Procente tragen, so ist

$$\frac{1710 - x}{17x} = \frac{x - 960}{12\,(2000 - x)}$$

also $12x^2 - 44520x + 41040000 = 17x^2 - 16320x$

oder $x^2 + 5640x = 8208000$

folgl. $x = -2820 + \sqrt{(2820^2 + 8208000)}$

$= 1200$ rthlr. Einlage des ersten

und also ist 800 rthlr. die Einlage des andern.

41.

Nennt man die beiden Zahlen x und y, so ist

$$x + y = 41$$

$$\text{und } x^2 + y^2 = 901$$

Da diese Gleichungen bereits A. IV. §. 3. S. 98 im Allgemeinen aufgelöset worden sind, so braucht man nur in den daselbst gefundenen Formeln statt a und b die hier gegebenen Zahlen 41 und 901 zu substituiren, und man erhält

$$x = \frac{41 - \sqrt{(2 \cdot 901 - 41^2)}}{2} = 15$$

$$\text{und } y = \frac{41 + \sqrt{(2 \cdot 901 - 41^2)}}{2} = 26$$

42.

Die Auflösung dieser Aufgabe führt unmittelbar zu den §. 3. S. 98 aufgestellten Gleichungen, und ist daher hier weggeblieben.

43.

Hier erhält man

$$x - y = 8$$

$$\text{und } x^2 + y^2 = 544$$

Diese Gleichungen behandle man wie die in dem so eben erwähnten §. 3 S. 99, so findet man hier auf dieselbe Art die Summe beider Zahlen = 32, wie man dort die Differenz gefunden hat. Aus der Summe und der Differenz beider Zahlen findet man aber leicht die Zahlen 12 und 20 selbst.

44.

Sind die Zahlen x und y, so ist

$$xy = 255$$

$$\text{und } x^2 + y^2 = 514$$

Diese Gleichungen sind §. 4 S. 99 allgemein aufgelöset. Substituirt man daher in jenen allgemeinen Formeln 255 statt a, und 514 statt b, so findet man

$$x = \sqrt{\frac{514 + \sqrt{(514^2 - 4 \cdot 255^2)}}{2}} = 17$$

$$\text{und } y = \sqrt{\frac{514 - \sqrt{(514^2 - 4 \cdot 255^2)}}{2}} = 15$$

45.

Die beiden Theile seyen x und y, so ist

$$\text{I. } x + y = 16$$

$$\text{II. } xy + x^2 + y^2 = 208$$

Man quadrire beide Theile der Gleichung (I.), so erhält man

$$x^2 + 2xy + y^2 = 256$$

von dieser Gleichung subtrahire man (II.), so bleibt

$$xy = 48$$

Da nun hier die Summe zweier Zahlen und ihr Product gegeben ist, so findet man nach den Formeln §. 2 S. 96 die beiden gesuchten Zahlen 4 und 12.

46.

Die Zahlen seyen x und y, so ist

$$x + y = 39$$

$$\text{und } x^3 + y^3 = 17199$$

Diese Gleichungen sind im Allgemeinen aufgelöset §. 5 S. 101. Hiernach ist

$$x = \frac{39}{2} - \sqrt{\frac{4 \cdot 17199 - 39^3}{12 \cdot 39}} = 15$$

$$\text{und } y = \frac{39}{2} + \sqrt{\frac{4 \cdot 17199 - 39^3}{12 \cdot 39}} = 24$$

47.

Das Gehalt sey = x rthlr., und die um 10 von einander unterschiedenen Wurzeln der in der Aufgabe erwähnten Cubikzahlen seyen y und y + 10; so ist

$$\text{I. } x - 142 = y^3$$

$$\text{und II. } x + 1578 = (y + 10)^3$$

$$= y^3 + 30y^2 + 300y + 1000$$

Subtrahirt man (I.) von (II.), so bleibt

$$30y^2 + 300y + 1000 = 1720$$

$$\text{oder } y^2 + 10y = 24$$

$$\text{folgl. } y = -5 + \sqrt{(5^2 + 24)} = 2$$

$$\text{hieraus ergiebt sich } x = 2^3 + 142 = 150 \text{ rthlr.}$$

48.

Die Zahl sey x, so ist

$$x + \sqrt{x} = 1332$$

$$\text{oder } x - 1332 = -\sqrt{x}$$

Erhebt man beide Theile der Gleichung zum Quadrat, so ist

$$x^2 - 2664x + 1774224 = x$$

$$\text{oder } x^2 - 2665x = -1774224$$

$$\text{folgl. } x = \frac{2665}{2} - \sqrt{\left[\left(\frac{2665}{2}\right)^2 - 1774224\right]} = 1296$$

49.

Die Zahl sey x, so ist

$$x - \sqrt{x} = 48\tfrac{3}{4} = \frac{195}{4}$$

$$\text{oder } 4x - 4\sqrt{x} = 195$$

$$\text{also } 4x - 195 = 4\sqrt{x}$$

Erhebt man beide Theile der Gleichung zum Quadrat, so ist

$$16x^2 - 1560x + 38025 = 16x$$

$$\text{oder } x^2 - \frac{197x}{2} = -\frac{38025}{16}$$

$$\text{folgl. } x = \frac{197}{4} + \sqrt{\left[\left(\frac{197}{4}\right)^2 - \frac{38025}{16}\right]} = 56\tfrac{1}{4}$$

50.

Der eine Theil von a sey x, so ist der andere Theil a — x. Der eine Theil von b sey y, folglich ist der andere Theil b — y. Es ist demnach

$$x : y = m : n$$

$$\text{also I. } nx = my$$

$$\text{und } (a - x)(b - y) = p$$

$$\text{oder II. } xy - bx - ay = p - ab$$

Man entwickele x aus (I.) und setze den Werth in (II.), so erhält man

$$y^2 - \frac{an + bm}{m} y = \frac{np - abn}{m}$$

folglich

$$y = \frac{an + bm}{2m} \pm \sqrt{\frac{a^2n^2 + 2abmn + b^2m^2 + 4mnp - 4abmn}{4m^2}}$$

$$= \frac{an + bm \pm \sqrt{[(an - bm)^2 + 4mnp]}}{2m}$$

$$\text{und } x = \frac{an + bm \pm \sqrt{[(an - bm)^2 + 4mnp]}}{2n}$$

Um nun das Verhältniß der beiden für x und y erhaltenen Werthe zu finden, so muß man einen gemeinschaftlichen Nenner suchen, und dieser ist $2mn$; man muß daher den Werth von y mit n, und den von x mit m multipliciren. Setzt man demnach

$$\frac{an + bm \pm \sqrt{[(an - bm)^2 + 4mnp]}}{2mn} = A$$

$$\text{so ist } x = mA \text{ und } y = nA$$

woraus sich ergiebt, daß sich beide Zahlen wie $m : n$ verhalten.

51.

Die ersten Theile beider Zahlen seyen x und y, so sind die andern Theile $a - x$ und $b - y$. Es ist demnach

$$x : y = m : n$$

$$\text{oder I. } my = nx$$

$$\text{Ferner ist } (a - x)^2 + (b - y)^2 = s$$

$$\text{oder II. } x^2 + y^2 - 2ax - 2by = s - a^2 - b^2$$

Entwickelt man y aus (I.) und setzt den Werth in (II.), so erhält man

$$x^2 + \left(\frac{nx}{m}\right)^2 - 2ax - \frac{2bnx}{m} = s - a^2 - b^2$$

$$\text{oder } x^2 - \frac{2am^2 + 2bmn}{m^2 + n^2}x = \frac{(s - a^2 - b^2)\, m^2}{m^2 + n^2}$$

folglich

$$x=\frac{am^2+bmn}{m^2+n^2}\pm\sqrt{\left[\left(\frac{am^2+bmn}{m^2+n^2}\right)^2+\frac{(s-a^2-b^2)m^2}{m^2+n^2}\right]}$$

$$=\frac{m\left[am+bn\pm\sqrt{[(am+bn)^2+(m^2+n^2)(s-a^2-b^2)]}\right]}{m^2+n^2}$$

Für y erhält man denselben Ausdruck, nur muß statt des gemeinschaftlichen Factors m der gemeinschaftliche Factor n gesetzt werden. Ist daher der Kürze wegen

$$\frac{am+bn\pm\sqrt{[(am+bn)^2+(m^2+n^2)(s-a^2-b^2)]}}{m^2+n^2}=A$$

so ist $x = mA$ und $y = nA$

und beide Theile verhalten sich also wie $m : n$.

52.

Die Zahlen seyen x und y, so ist

$$x - y + x^2 - y^2 = 150$$
$$x + y + x^2 + y^2 = 330$$

Diese Gleichungen sind im Allgemeinen Abschn. IV. §. 11. S. 109 aufgelöset. Substituirt man daher statt a 330, und statt b 150, so ist

$$x=\frac{-1+\sqrt{(2\cdot330+2\cdot150+1)}}{2}=\frac{-1+\sqrt{961}}{2}=15$$

$$y=\frac{-1+\sqrt{(2\cdot330-2\cdot150+1)}}{2}=\frac{-1+\sqrt{361}}{2}=9$$

53.

Die Zahlen seyen x und y, so ist

I. $x + y = xy$

II. $x + y = x^2 - y^2 = (x + y)(x - y)$

Dividirt man beide Theile der Gleichung (II.) durch $x + y$, so erhält man

$$\text{III. } x - y = 1$$

Addirt man (I.) und (III.), so ist

$$2x = xy + 1$$

$$\text{oder IV. } xy = 2x - 1$$

Nun ergiebt sich aus (III.)

$$y = x - 1$$

Substituirt man diesen Werth von y in (IV.), so ist

$$x\,(x - 1) = 2x - 1$$

$$\text{oder } x^2 - 3x = -1$$

$$\text{folgl. } x = \frac{3}{2} + \sqrt{\left(\frac{9}{4} - 1\right)} = \frac{3}{2} + \sqrt{\frac{5}{4}} = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$$

und also

$$y = x - 1 = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2} - 1 = \frac{3 \pm \sqrt{5} - 2}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

Daß übrigens diese für x und y gefundenen Werthe der Aufgabe ein Genüge leisten, erhellet aus dem Folgenden. Es ist

$$x + y = \frac{3 \pm \sqrt{5} + 1 \pm \sqrt{5}}{2} = \frac{4 \pm 2\sqrt{5}}{2} = 2 \pm \sqrt{5}$$

$$\text{Ferner } xy = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2} \cdot \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{5} \pm 3\sqrt{5} + 5}{4}$$

$$= \frac{8 \pm 4\sqrt{5}}{4} = 2 \pm \sqrt{5}$$

$$\text{Endlich } x^2 - y^2 = \frac{9 \pm 6\sqrt{5} + 5}{4} - \frac{1 \pm 2\sqrt{5} + 5}{4}$$

$$= \frac{9 + 5 - 1 - 5 \pm 4\sqrt{5}}{4} = \frac{8 \pm 4\sqrt{5}}{4} = 2 \pm \sqrt{5}$$

54.

Nennt man zwei der zu suchenden Zahlen x und y, so ist die dritte $= \frac{y^2}{x}$, weil nämlich nach der Aufgabe $x : y = y : z$ seyn soll. Es ist demnach

$$\text{I. } x + y + \frac{y^2}{x} = 126$$

$$\text{Ferner } x \cdot y \cdot \frac{y^2}{x} = y^3 = 13824$$

$$\text{folgl. } y = 24$$

Substituirt man diesen Werth von y in (I.), so erhält man

$$x + 24 + \frac{24^2}{x} = 126$$

$$\text{oder } x^2 - 102x = -576$$

$$\text{folglich } x = 51 + \sqrt{(51^2 - 576)} = 96$$

und also ist die dritte Zahl

$$\frac{y^2}{x} = \frac{24^2}{96} = 6$$

55.

Die Ziffern der gesuchten Zahlen mögen x, y, z seyn, also die Zahl den Werth $x + 10y + 100z$ haben, so ist

$$\text{I. } x^2 + y^2 + z^2 = 104$$

$$\text{II. } y^2 = 2xz + 4$$

$$\text{und } x + 10y + 100z - 594 = 100x + 10y + z$$

$$\text{oder } 99x - 99z = -594$$

$$\text{oder III. } x - z = -6$$

Substituirt man in (I.) statt y^2 den ihm gleichen Werth $2xz + 4$ aus (II.), so ist

$$x^2 + 2xz + 4 + z^2 = 104$$

$$\text{oder } x^2 + 2xz + z^2 = 100$$

$$\text{folgl. IV. } x + z = 10$$

Addirt man nun (III.) und (IV.), so findet man

$x = 2$ für die Einer;

subtrahirt man (III.) von (IV.), so bleibt

$z = 8$ für die Hunderte,

und also aus (II.)

$$y = \sqrt{(2xz + 4)} = \sqrt{(2 \cdot 2 \cdot 8 + 4)} = 6$$

Die gesuchte Zahl ist daher 862.

56.

Die Zahlen seyen x und y, so ist

$$(x - y)(x^2 - y^2) = 160$$

$$(x + y)(x^2 + y^2) = 580$$

Die Auflösung dieser Gleichungen im Allgemeinen findet sich Abschn. IV. §. 14. S. 112. Hiernach ist, wenn man statt a 160, und statt b 580 substituirt,

$$x = \frac{\sqrt{(2 \cdot 580 - 160)} + \sqrt{160}}{2\sqrt[6]{(2 \cdot 580 - 160)}} = \frac{\sqrt{100 \cdot 10} + \sqrt{16 \cdot 10}}{2\sqrt[3]{\sqrt{1000}}}$$

$$= \frac{10\sqrt{10} + 4\sqrt{10}}{2\sqrt{10}} = \frac{14\sqrt{10}}{2\sqrt{10}} = \frac{14}{2} = 7$$

$$y = \frac{10\sqrt{10} - 4\sqrt{10}}{2\sqrt{10}} = \frac{6\sqrt{10}}{2\sqrt{10}} = \frac{6}{2} = 3$$

57.

Die Zahlen seyen x und y, so ist

$$\text{I.}\quad x + y + xy = 34$$

$$\text{II.}\quad x^2 + y^2 - (x + y) = 42$$

Man setze III. $x + y = 34 - xy = t$, so ist aus (II.)

$$x^2 + y^2 - t = 42$$

Nun läßt sich $x^2 + y^2$ ebenfalls durch t ausdrücken. Denn es ist erstlich

$$t^2 = x^2 + 2xy + y^2$$

und aus (III.) ergiebt sich $xy = 34 - t$, folglich ist

$$t^2 = x^2 + y^2 + 68 - 2t$$

$$\text{also } x^2 + y^2 = t^2 + 2t - 68$$

$$\text{Es ist demnach } t^2 = -2t + 68 + t + 42$$

$$\text{oder } t^2 + t = 110$$

$$\text{folgl. } t = -\tfrac{1}{2} + \sqrt{(\tfrac{1}{4} + 110)} = 10 = x + y$$

$$\text{und also } xy = 34 - t = 34 - 10 = 24$$

Da nunmehr die Summe und das Product der Zahlen x und y bekannt sind, so braucht man nur in die §. 2. S. 97 befindlichen Formeln 10 statt a und 24 statt b zu substituiren; hierdurch erhält man

$$x = \frac{10 - \sqrt{(10^2 - 4 \cdot 24)}}{2} = 4$$

$$\text{und } y = \frac{10 + \sqrt{(10^2 - 4 \cdot 24)}}{2} = 6$$

58.

Die beiden Zahlen mögen wieder x und y seyn, so ist

$$\text{I.}\quad x + y + xy = a$$

$$\text{II.}\quad x^2 + y^2 - (x + y) = b$$

Man setze III. $x + y = a - xy = t$

so ist aus (II.)

$x^2 + y^2 - t = b$ oder IV. $x^2 + y^2 = b + t$

Nun läßt sich $x^2 + y^2$ ebenfalls durch t ausdrücken. Denn es ist erstlich

$$t^2 = x^2 + 2xy + y^2$$

und aus (III.) ergiebt sich V. $xy = a - t$, folglich ist

$$t^2 = x^2 + y^2 + 2a - 2t$$

$$\text{also } x^2 + y^2 = t^2 + 2t - 2a$$

Es ist demnach aus (IV.) $b + t = t^2 + 2t - 2a$

$$\text{oder } t^2 + t = 2a + b$$

$$\text{folgl. } t = -\tfrac{1}{2} \pm \sqrt{(\tfrac{1}{4} + 2a + b)}$$

$$= \frac{-1 \pm \sqrt{(1 + 8a + 4b)}}{2} = x + y$$

und aus (V.) $xy = \dfrac{2a + 1 \mp \sqrt{(1 + 8a + 4b)}}{2}$

Setzt man daher der Kürze wegen

$$\frac{-1 \pm \sqrt{(1 + 8a + 4b)}}{2} = A$$

$$\text{und } \frac{2a + 1 \mp \sqrt{(1 + 8a + 4b)}}{2} = B$$

und substituirt diese Werthe in die Seite 97 §. 2 befindlichen Formeln für die dortige Summe a und das Product b, so erhält man

$$x = \frac{A \pm \sqrt{(A^2 - 4B)}}{2};\ y = \frac{A \mp \sqrt{(A^2 - 4B)}}{2}$$

59.

Da die Summe beider Zahlen bekannt ist, so kommt es nur darauf an, die Differenz derselben zu finden.

Es sey daher die Differenz beider Zahlen = d, so ist die eine Zahl $\frac{a+d}{2}$ und die andere $\frac{a-d}{2}$

$$\text{Es ist demnach } \left(\frac{a+d}{2}\right)^4 + \left(\frac{a-d}{2}\right)^4 = b$$

$$\text{oder } a^4 + 4a^3d + 6a^2d^2 + 4ad^3 + d^4$$
$$+ a^4 - 4a^3d + 6a^2d^2 - 4ad^3 + d^4 = 16b$$
$$\text{oder } d^4 + 6a^2d^2 = 8b - a^4$$
$$d^4 + 6a^2d^2 + 9a^4 = 8b - a^4 + 9a^4 = 8a^4 + 8b$$
$$d^2 + 3a^2 = \pm \sqrt{(8a^4 + 8b)}$$
$$\text{also } d^2 = -3a^2 \pm \sqrt{(8a^4 + 8b)}$$
$$\text{folgl. } d = \sqrt{[-3a^2 \pm \sqrt{(8a^4 + 8b)}]}$$

60.

Hier ist abermals die Summe beider Zahlen gegeben, ihre Differenz sey daher = d, so sind die Zahlen selbst

$$\frac{a+d}{2} \text{ und } \frac{a-d}{2}$$

Es ist demnach

$$a^5 + 5a^4d + 10a^3d^2 + 10a^2d^3 + 5ad^4 + d^5$$
$$+ a^5 - 5a^4d + 10a^3d^2 - 10a^2d^3 + 5ad^4 - d^5 = 32b$$
$$\text{oder } 2a^5 + 20a^3d^2 + 10ad^4 = 32b$$
$$5ad^4 + 10a^3d^2 = 16b - a^5$$
$$d^4 + 2a^2d^2 = \frac{16b - a^5}{5a}$$
$$d^4 + 2a^2d^2 + a^4 = \frac{16b - a^5 + 5a^5}{5a} = \frac{4(a^5 + 4b)}{5a}$$
$$d^2 + a^2 = \pm 2\sqrt{\frac{a^5 + 4b}{5a}}$$

$$\text{also } d^2 = -a^2 \pm 2\sqrt{\frac{a^5 + 4b}{5a}}$$

$$\text{folgl. } d = \pm\sqrt{\left(-a^2 \pm 2\sqrt{\frac{a^5 + 4b}{5a}}\right)}$$

Die Zahlen selbst sind demnach

$$\frac{a \pm \sqrt{\left(-a^2 \pm 2\sqrt{\frac{a^5 + 4b}{5a}}\right)}}{2}$$

$$\text{und } \frac{a \mp \sqrt{\left(-a^2 \pm 2\sqrt{\frac{a^5 + 4b}{5a}}\right)}}{2}$$

Multiplicirt man beide Zahlen mit einander, so erhält man

$$p = \frac{a^2 - \left(-a^2 \pm 2\sqrt{\frac{a^5 + 4b}{5a}}\right)}{4} = \tfrac{1}{2}\left[a^2 \mp \sqrt{\frac{a^5 + 4b}{5a}}\right]$$

welcher Ausdruck in derselben Art von dem Herrn Verfasser der Aufgaben angegeben ist.

61.

Die Differenz beider Zahlen sey $= d$, so sind die Zahlen selbst $\frac{a + d}{2}$ und $\frac{a - d}{2}$

Es ist demnach

$$\left[\left(\frac{a + d}{2}\right)^2 + \left(\frac{a - d}{2}\right)^2\right]\left(\frac{a^2 - d^2}{4}\right) = b$$

$$\text{oder } \frac{2a^2 + 2d^2}{4} \cdot \frac{a^2 - d^2}{4} = b$$

$$2a^4 + 2a^2d^2 - 2a^2d^2 - 2d^4 = 16b$$

$$\text{also } d = \pm\sqrt[4]{(a^4 - 8b)}$$

Die beiden Zahlen sind daher

$$\frac{a + \sqrt[4]{(a^4 - 8b)}}{2} \text{ und } \frac{a - \sqrt[4]{(a^4 - 8b)}}{2}$$

Das Product dieser beiden Zahlen ist also, wie auch der Herr Verfasser der Aufgaben angiebt,

$$= \tfrac{1}{4}[a^2 - \sqrt{(a^4 - 8b)}]$$

62.

Die beiden gesuchten Zahlen seyen x und y, so ist

$$x + y + x^2 + y^2 = a$$

$$\text{und } m(x^2 + y^2) + nxy = b$$

Man setze $x + y = s$ und $xy = p$, so ist

$$x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy = s^2 - 2p$$

Es ist demnach

$$\text{I.} \quad s + s^2 - 2p = a$$

$$\text{und II.} \quad ms^2 - 2mp + np = b$$

Aus (I.) ergiebt sich

$$\text{III.} \quad p = \frac{s^2 + s - a}{2}$$

Substituirt man diesen Ausdruck in (II.), so erhält man

$$ms^2 - ms^2 - ms + ma + n\frac{s^2 + s - a}{2} = b$$

oder IV. $ns^2 + (n - 2m)s = 2b + (n - 2m)a$

Entwickelt man hieraus s, und setzt diesen Werth und den von p in die quadratische Gleichung

$$x^2 - sx + p = 0$$

so erhält man die gesuchten Werthe beider Größen.

63.

Die beiden ersten Glieder der Proportion seyen x und y, so ist das dritte Glied $a-x$ und das vierte $b-y$. Die Proportion ist demnach

$$y : x = a - x : b - y$$

hieraus ergiebt sich $by - y^2 = ax - x^2$
Ferner ist, nach der Aufgabe,

$$y^2 + x^2 + (a-x)^2 + (b-y)^2 = c$$

oder, wenn man die beiden letzten Glieder wirklich zum Quadrat erhebet, und die bekannten von den unbekannten Größen trennt,

$$y^2 + x^2 - ax - by = \frac{c - a^2 - b^2}{2}$$

oder auch $by - y^2 + ax - x^2 = \dfrac{a^2 + b^2 - c}{2}$

Da aber $by - y^2 = ax - x^2$

so ist $2(ax - x^2) = \dfrac{a^2 + b^2 - c}{2}$

also $ax - x^2 = \dfrac{a^2 + b^2 - c}{4}$

gleich dem Product der beiden mittlern oder äußern Glieder. Aus der Summe und dem Producte zweier Zahlen lassen sich nun nach den in Abschn. IV. §. 2. Seite 97 aufgestellten Formeln die Zahlen selbst finden. Denn es ist hiernach

$$x = \frac{a \pm \sqrt{\left(a^2 - 4 \cdot \frac{a^2 + b^2 - c}{4}\right)}}{2} = \tfrac{1}{2}\left[a \pm \sqrt{(c - b^2)}\right]$$

folglich ist das dritte Glied der Proportion, welches gleich war $a - x$

$$= a - \tfrac{1}{2}[a \pm \sqrt{(c - b^2)}] = \tfrac{1}{2}[a \mp \sqrt{(c - b^2)}]$$

Auf eine ähnliche Art erhält man

$$y = \frac{b \pm \sqrt{\left(b^2 - 4 \cdot \frac{a^2 + b^2 - c}{4}\right)}}{2} = \tfrac{1}{2}[b \pm \sqrt{(c - a^2)}]$$

und also das vierte Glied, welches gleich war $b - y$

$$= b - \tfrac{1}{2}[b \pm \sqrt{(c - a^2)}] = \tfrac{1}{2}[b \mp \sqrt{(c - a^2)}]$$

Die ganze Proportion hat demnach folgende Gestalt

$$\tfrac{1}{2}[b \pm \sqrt{(c - a^2)}] : \tfrac{1}{2}[a \pm \sqrt{(c - b^2)}]$$
$$= \tfrac{1}{2}[a \mp \sqrt{(c - b^2)}] : \tfrac{1}{2}[b \mp \sqrt{(c - a^2)}]$$

64.

Wenn auch hier die beiden ersten Glieder der Proportion gleich y und x gesetzt werden, so sind die beiden andern $x + a$ und $y + b$. Es ist daher

$$y : x = x + a : y + b$$

Setzt man nun auf eben die Art, wie in der vorhergehenden Auflösung, die Schlüsse fort, so findet man leicht das verlangte Resultat.

Diese, so wie auch die vorige Aufgabe, läßt sich auf folgende Art kürzer auflösen.

Die Differenz der äußern und mittlern Glieder ist gegeben, es kommt also nur auf ihre Summe an. Es sey daher die Summe der äußern Glieder $= S$ und die der mittlern $= s$, so hat die Proportion folgende Gestalt

$$\frac{S+b}{2} : \frac{s+a}{2} = \frac{s-a}{2} : \frac{S-b}{2}$$

Multiplicirt man die äußern und mittlern Glieder mit einander, und läßt den gemeinschaftlichen Nenner weg, so erhält man

$$S^2 - b^2 = s^2 - a^2$$

$$\text{oder } s^2 = a^2 - b^2 + S^2$$

Ferner ist $\frac{2S^2 + 2b^2 + 2s^2 + 2a^2}{4} = c$

$$\text{oder } s^2 = 2c - a^2 - b^2 - S^2$$

Es ist demnach

$$a^2 - b^2 + S^2 = 2c - a^2 - b^2 - S^2$$

$$\text{oder } S = \sqrt{(c - a^2)}$$

Hieraus ergiebt sich die gesuchte Proportion

$$\tfrac{1}{2}\,[-b + \sqrt{(c - a^2)}] : \tfrac{1}{2}\,[-a + \sqrt{(c - b^2)}]$$

$$= \tfrac{1}{2}\,[a + \sqrt{(c - b^2)}] : \tfrac{1}{2}\,[b + \sqrt{(c - a^2)}]$$

Auch siehet man leicht, daß das Product der beiden äußern oder mittlern Glieder gleich ist

$$\frac{c - a^2 - b^2}{4}$$

65.

Aus der Summe und dem Producte zweier Größen kann man immer die Größen selbst finden. Hier ist das Product gegeben, man braucht daher nur die Summe zu suchen. Nun ist die Summe aller 4 Größen = b, man hat also die Summe von beiden Summen, und es kommt nur darauf an, die Differenz von diesen beiden Summen zu finden. Diese Differenz sey = A

und die äußere Summe sey größer als die mittlere, so ist die Summe der äußern Glieder $= \frac{b + A}{2}$ und die der mittlern $= \frac{b - A}{2}$. Da man nun ferner die Differenz der beiden äußern Glieder und die der beiden mittlern zu wissen braucht, um die 4 Glieder selbst zu erhalten, so setze man die Differenz der beiden äußern Glieder = d, so ist das erste Glied

$$\frac{\frac{b + A}{2}}{2} + \frac{d}{2} = \frac{b + A + 2d}{4}$$

und das vierte Glied

$$\frac{\frac{b + A}{2}}{2} - \frac{d}{2} = \frac{b + A - 2d}{4}$$

Endlich setze man die Differenz der beiden mittlern Glieder = D, so ist das zweite Glied

$$\frac{\frac{b - A}{2}}{2} + \frac{D}{2} = \frac{b - A + 2D}{4}$$

und das dritte Glied

$$\frac{\frac{b - A}{2}}{2} - \frac{D}{2} = \frac{b - A - 2D}{4}$$

Die gesuchte Proportion hat daher folgende Gestalt

$$\frac{b+A+2d}{4} : \frac{b-A+2D}{4} = \frac{b-A-2D}{4} : \frac{b+A-2d}{4}$$

Multiplicirt man nun die beiden äußern Glieder und schafft den gemeinschaftlichen Nenner weg, so erhält man die Gleichung

$$\text{I. } b^2 + 2bA + A^2 - 4d^2 = 16a$$

und durch die Multiplication der beiden mittlern Glieder findet man die Gleichung

$$\text{II. } b^2 - 2bA + A^2 - 4D^2 = 16a$$

Erhebt man ferner die einzelnen Glieder der Proportion zum Quadrat, so ist

Quad. d. ersten Gliedes $\frac{b^2+2bA+A^2+2bd+2Ad+4d^2}{16}$

Quad. des vierten Gl. $\frac{b^2+2bA+A^2-2bd-2Ad+4d^2}{16}$

Summe beider Quadrate $\frac{2b^2 + 4bA + 2A^2 + 8d^2}{16}$

Quad. des zweiten Gl. $\frac{b^2-2bA+A^2+2bD-2AD+4D^2}{16}$

Quad. des dritten Gl. $\frac{b^2-2bA+A^2-2bD+2AD+4D^2}{16}$

Summe beider Quadrate $\frac{2b^2 - 4bA + 2A^2 + 8D^2}{16}$

Die Summe sämmtlicher Quadrate ist demnach

$$\frac{4b^2 + 4A^2 + 8(D^2 + d^2)}{16}$$

hieraus erhält man die Gleichung

$$\text{III. } 4b^2 + 4A^2 + 8(D^2 + d^2) = 16c$$

Addirt man die Gleichungen (I.) und (II.), so erhält man

$$\text{IV. } 2b^2 + 2A^2 - 4(D^2 + d^2) = 32a$$

Multiplicirt man ferner (IV.) mit 2 und addirt diese Gleichung zu (III.), so findet man

$$8b^2 + 8A^2 = 16c + 64a$$

und hieraus $A = \sqrt{(8a + 2c - b^2)}$

Auf Seite 97 befinden sich die Formeln für den Fall, wenn die Summe und das Product zweier Größen gegeben sind. Dort ist die Summe durch a und das Product durch b, hier sind die Summen durch $\frac{b \pm A}{2}$ und das Product durch a ausgedrückt. Substituirt man daher diese Werthe für jene, so erhält man für das erste und vierte Glied

$$\frac{\frac{b+\sqrt{(8a+2c-b^2)}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{b^2+8a+2c-b^2+2bA}{4} - 4a\right)}}{2}$$

$$= \frac{\frac{b+A}{2} \pm \sqrt{\frac{2c-8a+2bA}{4}}}{2} = \frac{\frac{b+A \pm \sqrt{(2c-8a+2bA)}}{2}}{2}$$

$$= \tfrac{1}{4}\,[b + A \pm \sqrt{(2c-8a+2bA)}]$$

Auf gleiche Art findet man das zweite und dritte Glied

$$= \tfrac{1}{4}\,[b - A \pm \sqrt{(2c-8a-2bA)}]$$

Die Proportion selbst hat demnach folgende Gestalt:

$$\tfrac{1}{4}\,[b + A + \sqrt{(2c-8a+2bA)}] : \tfrac{1}{4}\,[b - A - \sqrt{(2c-8a-2bA)}]$$
$$= \tfrac{1}{4}\,[b - A + \sqrt{(2c-8a-2bA)}] : \tfrac{1}{4}\,[b + A - \sqrt{(2c-8a+2bA)}]$$

66.

Diese Aufgabe wird auf eine ähnliche Art wie die vorhergehende aufgelöst.

67.

Die Summe der beiden äußern Glieder sey = x, so ist die Summe der beiden mittlern = b — x. Ferner sey die Differenz der äußern Glieder = d und

X

die der mittlern = D, so ist die Form der verlangten Proportion folgende

$$\frac{x+d}{2} : \frac{b-x+D}{2} = \frac{b-x-D}{2} : \frac{x-d}{2}$$

Multiplicirt man nun die beiden äußern Glieder, und schafft den gemeinschaftlichen Nenner weg, so erhält man die Gleichung

$$\text{I.} \quad x^2 - d^2 = 4a$$

und durch die Multiplication der beiden mittlern Glieder erhält man

$$\text{II.} \quad b^2 - 2bx + x^2 - D^2 = 4a$$

Erhebt man ferner die einzelnen Glieder der Proportion zum Quadrat, so ist

Quadrat des ersten Gliedes $\frac{x^2 + 2xd + d^2}{4}$

Quadrat des vierten Gliedes $\frac{x^2 - 2xd + d^2}{4}$

Summe der Quad. beider äuß. Glied. $\frac{2x^2 + 2d^2}{4}$

Quadr. des zweiten Gl. $\frac{b^2-2bx+x^2+2bD-2Dx+D^2}{4}$

Quadr. des dritten Gl. $\frac{b^2-2bx+x^2-2bD+2Dx+D^2}{4}$

Summe der Quadrate beider mittlern Glieder $\frac{2b^2-4bx+2x^2+2D^2}{4}$

Subtrahirt man daher die letztere Summe von der erstern, so findet man

$$\frac{2(d^2 - D^2) + 4bx - 2b^2}{4}$$

und dieses giebt die Gleichung

$$\text{III.}\quad 2(d^2 - D^2) + 4bx - 2b^2 = 4c$$

Subtrahirt man die Gleichung (I.) von (II.), so bleibt

$$\text{IV.}\quad b^2 - 2bx + d^2 - D^2 = 0$$

Multiplicirt man nun (IV.) mit 2, und subtrahirt sie von (III.), so bleibt

$$-4b^2 + 8bx = 4c$$

$$\text{folgl. } x = \frac{b^2 + c}{2b}$$

Mithin muß die Summe der beiden mittlern Glieder

$$\frac{b^2 - c}{2b}$$

seyn, weil nämlich die Summe aller vier Glieder alsdann $= \frac{b^2 + c}{2b} + \frac{b^2 - c}{2b}$, welche Summe $= b$ ist, wie vorausgesetzt worden.

Hiernach hat man also die Summe und das Product zweier Größen, woraus sich bekanntlich die Größen selbst herleiten lassen.

68.

Aus der Summe zweier Größen und aus der Quadratsumme derselben lassen sich die Größen selbst herleiten. Da nun die Summe der drei Glieder sowohl als auch ihre Quadratsumme gegeben ist, so braucht man nur das mittlere Glied zu kennen, und solches von beiden Summen abzuziehen; wo dann die Reste die nöthigen data angeben.

Man setze daher die Summe des ersten und dritten Gliedes $= x$ und ihre Differenz $= d$, so ist

das erste Glied $= \frac{x+d}{2}$

das dritte Glied $= \frac{x-d}{2}$

und das mittlere Glied $= a - x$

Bei einer stetigen Proportion ist das Product der äußern Glieder gleich dem Quadrate des mittlern Gliedes. Es ist demnach

$$\frac{x^2 - d^2}{4} = a^2 - 2ax + x^2$$

oder I. $3x^2 - 8ax + 4a^2 + d^2 = 0$

Ferner ist die Summe der Quadrate der drei Glieder

$$= \frac{x^2 + d^2}{2} + a^2 - 2ax + x^2$$

hieraus erhält man die Gleichung

$$\frac{x^2 + d^2}{2} + a^2 - 2ax + x^2 = b$$

oder II. $3x^2 - 4ax + 2a^2 + d^2 = 2b$

Subtrahirt man (II.) von (I.), so bleibt

$$4ax - 2a^2 = 2b$$

folgl. $x = \frac{a^2 + b}{2a}$

hieraus ergiebt sich das mittlere Glied

$$= \frac{a^2 - b}{2a}$$

weil nämlich $\frac{a^2 + b}{2a} + \frac{a^2 - b}{2a} = a$

Da nun das mittlere Glied bekannt ist, so braucht man es nur zum Quadrat zu erheben und von b ab=

zuziehen, um die Quadratsumme der äußern Glieder zu erhalten. Diese ist also

$$= b - \frac{a^4 - 2a^2b + b^2}{4a^2} = \frac{6a^2b - a^4 - b^2}{4a^2}$$

Substituirt man daher die hier gefundenen Werthe für die Summe und die Quadratsumme der äußern Glieder in den S. 98. §. 3 befindlichen Formeln, so erhält man die äußern Glieder

$$= \frac{\frac{a^2+b}{2a} \pm \sqrt{\left(2\frac{6a^2b-a^4-b^2}{4a^2} - \frac{a^4+2a^2b+b^2}{4a^2}\right)}}{2}$$

$$= \frac{a^2 + b \pm \sqrt{(10a^2b - 3a^4 - 3b^2)}}{4a}$$

$$= \frac{a^2 + b \pm \sqrt{[(3b - a^2)(3a^2 - b)]}}{4a}$$

69.

Behält man die Benennungen wie in der vorhergehenden Auflösung bei, so ist auch hier

$$\text{I.}\quad 3x^2 - 8ax + 4a^2 + d^2 = 0$$

Ferner ist die Differenz, welche man erhält, wenn von der Summe der Quadrate der äußern Glieder das Quadrat des mittlern Gliedes abgezogen wird,

$$= \frac{x^2 + d^2}{2} - a^2 + 2ax - x^2$$

Es ist also $\frac{x^2 + d^2}{2} - a^2 + 2ax - x^2 = b$

oder $\text{II.}\quad -x^2 + 4ax - 2a^2 + d^2 = 2b$

Subtrahirt man (I.) von (II.), so bleibt

$$-4x^2 + 12ax - 6a^2 = 2b$$

$$\text{oder } x^2 - 3ax = -\frac{b + 3a^2}{2}$$

$$\text{also } x^2 - 3ax + \frac{9a^2}{4} = -\frac{b + 3a^2}{2} + \frac{9a^2}{4} = \frac{3a^2 - 2b}{4}$$

$$\text{folgl. } x = \frac{3a - \sqrt{(3a^2 - 2b)}}{2}$$

und hieraus ergiebt sich das mittlere Glied

$$= \frac{-a + \sqrt{(3a^2 - 2b)}}{2}$$

$$\text{weil } \frac{3a - \sqrt{(3a^2 - 2b)}}{2} + \frac{-a + \sqrt{(3a^2 - 2b)}}{2} = a$$

Nennt man nun, der Kürze wegen, das mittlere Glied $= g$, so ist die Summe der beiden äußern Glieder $= a - g$, und da bei einer stetigen Proportion das Quadrat des mittlern Gliedes gleich ist dem Producte der äußern Glieder, so ist dieses Product $= g^2$. Substituirt man daher die hier gefundenen Ausdrücke für die Summe und das Product der beiden äußern Glieder in die Seite 97 befindlichen Formeln, so erhält man die beiden äußern Glieder $\frac{a - g \pm \sqrt{[(a-g)^2 - 4g^2]}}{2} = \frac{a - g \pm \sqrt{(a^2 - 2ag - 3g^2)}}{2}$, und $\frac{a - g \mp \sqrt{(a^2 - 2ag - 3g^2)}}{2}$.

70.

Wenn s die halbe Summe und d die halbe Differenz der beiden mittlern Glieder bezeichnet, so ist $s - d$ das zweite und $s + d$ das dritte Glied in der gesuchten Progression. Quadrirt man nun das zweite Glied $s - d$ und dividirt das Quadrat durch

das dritte Glied $s + d$, so erhält man das erste Glied

$$= \frac{(s - d)^2}{s + d}$$

Quadrirt man ferner das dritte Glied $s + d$ und dividirt das Quadrat durch das zweite Glied $s - d$, so erhält man das vierte Glied

$$= \frac{(s + d)^2}{s - d}$$

Die Progression hat daher folgende Gestalt

$$\frac{(s - d)^2}{s + d} : s - d = s + d : \frac{(s + d)^2}{s - d}$$

Nun bringe man die vier Glieder unter einerlei Benennung und addire sie, so ist die Summe

$$= \frac{4s^3 + 4sd^2}{s^2 - d^2} = \frac{4s\,(s^2 + d^2)}{s^2 - d^2} = a$$

Hieraus ergiebt sich nun

$$\text{I.} \quad d = s\sqrt{\frac{a - 4s}{a + 4s}}$$

Ferner quadrire man die einzelnen Glieder, und bringe sie unter einerlei Nenner, so ist die Summe des ersten und vierten Gliedes

$$= \frac{(s - d)^6 + (s + d)^6}{(s^2 - d^2)^2}$$

$$= \frac{\left\{\begin{array}{l} s^6 - 6s^5d + 15s^4d^2 - 20s^3d^3 + 15s^2d^4 - 6sd^5 + d^6 \\ + s^6 + 6s^5d + 15s^4d^2 + 20s^3d^3 + 15s^2d^4 + 6sd^5 + d^6 \end{array}\right\}}{(s^2 - d^2)^2}$$

$$= \frac{2s^6 + 30s^4d^2 + 30s^2d^4 + 2d^6}{(s^2 - d^2)^2}$$

Die Summe des zweiten und dritten Gliedes ist

$$= \frac{[(s-d)^2+(s+d)^2]\,(s^2-d^2)^2}{(s^2-d^2)^2}$$

$$= \frac{(2s^2+2d^2)\cdot(s^4-2s^2d^2+d^4)}{(s^2-d^2)^2}$$

$$= \frac{2s^6-2s^4d^2-2s^2d^4+2d^6}{(s^2-d^2)^2}$$

Addirt man die Summe der Quadrate, so erhält man

$$\frac{\left\{\begin{array}{l} \;\;2s^6+30s^4d^2+30s^2d^4+2d^6 \\ +2s^6-\;\;2s^4d^2-\;\;2s^2d^4+2d^6\end{array}\right\}}{(s^2-d^2)^2}$$

$$= \frac{4s^6+28s^4d^2+28s^2d^4+4d^6}{(s^2-d^2)^2}$$

Es ist demnach

$$\text{II.}\quad \frac{4s^6+28s^4d^2+28s^2d^4+4d^6}{(s^2-d^2)^2} = b$$

Substituirt man nun den in (I.) gefundenen Werth von d in die Gleichung (II.) und entwickelt s, so erhält man

$$s = \frac{-b \pm \sqrt{[b^2+2a^2(a^2-b)]}}{4a}$$

Man braucht daher nur die für d und s gefundenen Werthe in die Progression

$$\frac{(s-d)^2}{s+d} : s-d = s+d : \frac{(s+d)^2}{s-d}$$

gehörig zu substituiren, um die verlangte Progression zu erhalten.

71.

Setzt man auch hier die halbe Summe der beiden mittlern Glieder = s und die halbe Differenz dersel-

ben = d, so ist aus demselben Grunde wie in der vorigen Auflösung die Form der gesuchten Progression folgende

$$\frac{(s-d)^2}{s+d} : s-d = s+d : \frac{(s+d)^2}{s-d}$$

Man bringe die beiden äußern Glieder unter einerlei Nenner und addire sie. Die Summe hiervon ist

$$\frac{(s-d)^3+(s+d)^3}{s^2-d^2} = \frac{\left\{\begin{matrix} s^3-3s^2d+3sd^2-d^3 \\ +s^3+3s^2d+3sd^2+d^3\end{matrix}\right\}}{s^2-d^2}$$

$$= \frac{2s^3+6sd^2}{s^2-d^2}$$

Unter gleichen Nenner bringe man die beiden mittleren Glieder und addire sie. Die Summe hiervon beträgt

$$\frac{(s^2-d^2)(s-d)+(s^2-d^2)(s+d)}{s^2-d^2} = \frac{\left\{\begin{matrix} s^3-sd^2-s^2d+d^3 \\ +s^3-sd^2+s^2d-d^3\end{matrix}\right\}}{s^2-d^2}$$

$$= \frac{2s^3-2sd^2}{s^2-d^2}$$

Subtrahirt man nun die Summe der mittlern Glieder von der Summe der äußern, so erhält man

$$\frac{2s^3+6sd^2-(2s^3-2sd^2)}{s^2-d^2} = \frac{8sd^2}{s^2-d^2}$$

Es ist demnach I. $\frac{8sd^2}{s^2-d^2} = a$

Ferner nehme man die Quadratsumme der beiden äußern Glieder

$$\frac{2s^6+30s^4d^2+30s^2d^4+2d^6}{(s^2-d^2)^2}$$

und ziehe die Quadratsumme der beiden mittlern Glieder

$$\frac{2s^6 - 2s^4d^2 - 2s^2d^4 + 2d^6}{(s^2 - d^2)^2}$$

davon ab, so erhält man

$$\text{II.} \quad \frac{32s^4d^2 + 32s^2d^4}{(s^2 - d^2)^2} = b$$

Erhebt man nun (I.) zum Quadrat, und ziehet diese Gleichung von (II.) ab, so bleibt

$$\frac{32s^4d^2 - 32s^2d^4}{(s^2 - d^2)^2} = b - a^2$$

$$\text{oder } \frac{32s^2d^2\,(s^2 - d^2)}{(s^2 - d^2)(s^2 - d^2)} = \frac{32s^2d^2}{s^2 - d^2} = b - a^2$$

Nun ist nach der Gleichung (I.)

$$\frac{32s^2d^2}{s^2 - d^2} = 4as$$

Es ist demnach $4as = b - a^2$

$$\text{folgl. } s = \frac{b - a^2}{4a}$$

Substituirt man diesen gefundenen Werth von s in die Gleichung

$$\frac{32s^2d^2}{s^2 - d^2} = b - a^2$$

so erhält man

$$\frac{32\,(b - a^2)^2d^2}{(b - a^2)^2 - 16a^2d^2} = b - a^2$$

$$\text{oder } \frac{32\,(b - a^2)d^2}{(b - a^2)^2 - 16a^2d^2} = 1$$

$$[32\,(b - a^2) + 16a^2]\,d^2 = (b - a^2)^2$$

$$\text{folgl. } d^2 = \frac{(b - a^2)^2}{32b - 16a^2} = \frac{(b - a^2)^2}{16 \cdot 2b - 16a^2}$$

$$\text{und } d = \frac{b - a^2}{4\sqrt{(2b - a^2)}}$$

72.

Auch hier ist, wie in den vorhergehenden Auflösungen, die Form der gesuchten Progression

$$\frac{(s - d)^2}{s + d} : s - d = s + d : \frac{(s + d)^2}{s - d}$$

Man bringe erstlich die vier Glieder unter einerlei Benennung

$$\frac{(s - d)^3}{s^2 - d^2} : \frac{(s - d)^2\ (s + d)}{s^2 - d^2}$$

$$= \frac{(s + d)^2\ (s - d)}{s^2 - d^2} : \frac{(s + d)^3}{s^2 - d^2}$$

Die Summe des ersten uud dritten Gliedes ist demnach

$$= \frac{2s^3 - 2s^2d + 2sd^2 - 2d^3}{s^2 - d^2}$$

und die Summe des zweiten und vierten Gliedes

$$= \frac{2s^3 + 2s^2d + 2sd^2 + 2d^3}{s^2 - d^2}$$

Subtrahirt man nun die erste Summe von der zweiten, so bleibt

$$\frac{4s^2d + 4d^3}{s^2 - d^2}$$

Man erhält daher die Gleichung

$$\frac{4s^2d + 4d^3}{s^2 - d^2} = a$$

$$\text{folgl. } s = d\sqrt{\frac{a + 4d}{a - 4d}} \text{ u. s. w.}$$

73.

Diese Auflösung so wie die Auflösungen der übrigen Aufgaben bis zu Ende dieses Kapitels sind zur Ersparung des Raumes weggeblieben, da der Herr Verfasser der Beispielsammlung solche zum Theil selbst aufgelöst, oder doch die nöthigen Winke dazu gegeben hat.

IX.

Auflösungen der Aufgaben für die Gleichungen von höhern Graden.

(Zu M. Hirsch Sammlung von Beispielen rc. XVIII. Kapitel, von S. 244 bis 254.)

1.

Ist die Zahl x, so hat man die Gleichung

$$\frac{x}{3} \cdot x^2 = \frac{x^3}{3} = 1944$$

Es ist also $x = \sqrt[3]{(3 \cdot 1944)} = \sqrt[3]{5832} = 18$

2.

Die Zahl sey x. Es ist also

$$\frac{x}{2} + \frac{x}{3} + \frac{x}{4} + 32 = 4640$$

$$\text{oder } \frac{x^3}{24} + 32 = 4640$$

also $x^3 = 110592$, und daher $x = 48$

3.

Wenn die Zahl = x angenommen wird, so ist

$$x^4 : \frac{x}{8} - 167 = 12000$$

oder $8x^3 = 12167$, folgl. $x = \sqrt[3]{\frac{12167}{8}} = 11\frac{1}{2}$

4.

Die Anzahl der Schachteln sey x, folglich sind in jeder Schachtel 3x Citronen enthalten, und also befinden sich in den x Schachteln $x \cdot 3x = 3x^2$ Citronen. Da nun für jede Citrone 2x Pfennige bezahlt worden, so kosten sämmtliche Citronen $2x \cdot 3x^2 = 6x^3$ Pfennige.

Es ist also $6x^3 = 16464$

folgl. $x = \sqrt[3]{2744} = 14$ Schachteln,

mithin waren in jeder Schachtel $3 \cdot 14 = 42$ Citronen. Es waren daher überhaupt $14 \cdot 42 = 588$ Citronen.

5.

Es mögen x Kaufleute gewesen seyn. Es gab also ein jeder die Summe von 1000x rthlr. Das gesammte Geld beträgt daher $x \cdot 1000x = 1000x^2$ rthlr. Mit diesem Gelde ist nach der Aufgabe $\frac{x}{2}$ Procent gewonnen worden. Man findet also die Interessen von dem Kapitale $1000x^2$, wenn man setzt

$$100 : \frac{x}{2} = 1000x^2 : \frac{1000x^2 \cdot \frac{x}{2}}{100}$$

Es ist daher $\frac{1000x^2 \cdot \frac{x}{2}}{100} = 5x^3 = 2560$

folgl. $x = 8$ Kaufleute.

6.

Das Kapital habe jährlich x Procent Zinsen ge-

bracht. Die Interessen vom ersten Jahre haben also $\frac{10000x}{100} = 100x$ betragen. Das Kapital war daher nach Verlauf des ersten Jahres gleich $10000 + 100x$. Die Interessen vom zweiten Jahre findet man, wenn man setzt $100 : x = 10000 + 100x : \frac{x(10000+100x)}{100}$. Es sind also die Interessen des zweiten Jahres $100x + x^2$. Das nunmehrige Kapital am Ende des zweiten Jahres ist demnach $10000 + 100x + 100x + x^2 = 10000 + 200x + x^2$. Man setze ferner $100 : x = 10000 + 200x + x^2 : \frac{x(10000+200x+x^2)}{100}$. Es sind daher $100x + 2x^2 + \frac{x^3}{100}$ die Interessen des dritten Jahres. Addirt man nun die Interessen von den drei Jahren zusammen, so erhält man

$$\frac{x^3}{100} + 3x^2 + 300x$$

Es ist also $\frac{x^3}{100} + 3x^2 + 300x = 1576\frac{1}{4} = \frac{6305}{4}$

oder $x^3 + 300x^2 + 30000x - 157625 = 0$

Die Gleichung hat nur eine mögliche Wurzel 5

folgl. ist $x = 5$.

7.

Wenn die drei Zahlen x, y und z sind, so ist

I. $x^2y = 112$

II. $y^2z = 588$

III. $z^2x = 576$

Multiplicirt man diese Gleichungen mit einander, so erhält man

$$x^3y^3z^3 = 112 \cdot 588 \cdot 576 = 37933056$$

und hieraus IV. $xyz = \sqrt[3]{37933056} = 336$

Dividirt man diese Gleichung durch (I.), so ist

$$\frac{xyz}{x^2y} = \frac{336}{112} \quad \text{oder} \quad \frac{z}{x} = 3$$

folgl. V. $z = 3x$

Substituirt man diesen Werth von z in (III.), so ist

$9x^3 = 576$ oder $x^3 = 64$ und daher $x = 4$

Den Werth von x in (V.) substituirt, giebt $z = 12$, und durch die beiden Werthe von x und z erhält man aus (IV.) $y = 7$.

8.

Die drei Zahlen seyen abermals x, y und z, so ist

I. $x^2y = a$

II. $y^2z = b$

III. $z^2x = c$

Multiplicirt man diese Gleichungen mit einander, so erhält man $x^3y^3z^3 = abc$

und hieraus IV. $xyz = \sqrt[3]{abc}$

Dividirt man diese Gleichung durch (I.), so ist

$$\frac{xyz}{x^2y} = \frac{\sqrt[3]{abc}}{a}$$

$$\text{oder } \frac{z}{x} = \frac{\sqrt[3]{abc}}{a}$$

folgl. V. $z = x\,\dfrac{\sqrt[3]{abc}}{a}$

Substituirt man diesen Werth von z in (III.), so ist

$$\left(\frac{x\sqrt[3]{abc}}{a}\right)^2 x = c$$

oder $$\frac{x^3\sqrt[3]{a^2b^2c^2}}{a^2} = c$$

$$x^3 = \frac{a^2c}{\sqrt[3]{a^2b^2c^2}} = \sqrt[3]{\frac{a^6c^3}{a^2b^2c^2}} = \sqrt[3]{\frac{a^4c}{b^2}}$$

folgl. $$x = \sqrt[9]{\frac{a^4c}{b^2}}$$

Den Werth von x in (V.) substituirt, giebt

$$z = \sqrt[9]{\frac{a^4c}{b^2}}\sqrt[3]{\frac{abc}{a^3}} = \sqrt[9]{\frac{a^4c}{b^2}}\sqrt[3]{\frac{bc}{a^2}} = \sqrt[9]{\frac{a^4cb^3c^3}{b^2a^6}}$$

$$= \sqrt[9]{\frac{c^4b}{a^2}}$$

und durch die beiden Werthe von x und z erhält man aus (IV.)

$$y\sqrt[9]{\frac{a^4c}{b^2}}\sqrt[9]{\frac{c^4b}{a^2}} = \sqrt[3]{abc}$$

folgl. $$y = \frac{\sqrt[3]{abc}}{\sqrt[9]{\frac{a^4c^5b}{a^2b^2}}} = \sqrt[9]{\frac{a^3b^3c^3}{\frac{a^4c^5b}{a^2b^2}}}$$

$$= \sqrt[9]{\frac{a^5b^5c^3}{a^4c^5b}} = \sqrt[9]{\frac{ab^4}{c^2}}$$

9.

Die Auflösung dieser Aufgabe ist der vorhergehenden ähnlich.

10.

Es mögen jedesmal x Quart abgezapft worden seyn. Nachdem also das Faß zum erstenmal abgezapft und wieder mit Wasser angefüllt worden, ist in selbigem 81 — x Quart reiner Wein überhaupt, und folglich in jedem Quart besonders $\frac{81-x}{81}$ Quart geblieben. Die Güte des Weines nach der ersten Mischung ist also $\frac{81-x}{81}$ mal pro Quart schlechter geworden. Da man nun von diesem schlechter gewordenen Wein zum zweitenmal x Quart wegnimmt, und dafür so viel Wasser hinzuthut, so verschlechtert er sich abermals in demselben Verhältniß wie vorher, nämlich $\frac{81-x}{81}$ mal pro Quart; und da nun diese Mischung auf eine gleiche Art viermal nach einander geschiehet, so verschlimmert sich der Wein $\left(\frac{81-x}{81}\right)^4$ mal pro Quart. Nun ist, nach der Aufgabe, bei der letzten Mischung nur noch 16 Quart reiner Wein im Fasse geblieben, es war also in jedem Quart nur noch $\frac{16}{81}$ Wein enthalten, mithin hatte sich der Wein $\frac{16}{81}$ mal verschlimmert. Es ist daher

$$\left(\frac{81-x}{81}\right)^4 = \frac{16}{81}$$

Ziehet man aus beiden Theilen der Gleichung die vierte Wurzel aus, so ist

$$\frac{81 - x}{81} = \frac{2}{3}$$

folgl. $x = 27$

11.

Wenn die eine Zahl x ist, so ist die andere $x + 4$. Ihre Summe ist also $2x + 4$, ihr Product $x^2 + 4x$, und das Product aus diesen beiden Ausdrücken $= (2x + 4)(x^2 + 4x) = 2x^3 + 12x^2 + 16x$.

Es ist also $2x^3 + 12x^2 + 16x = 1386$

oder $x^3 + 6x^2 + 8x - 693 = 0$

Diese Gleichung hat nur eine mögliche Wurzel 7, folglich ist $x = 7$, und daher die andere Zahl $= 11$.

12.

Das Gefäß habe x Mark gewogen. Da nun jede Mark so viel Loth Silber enthält, als das Gewicht des ganzen Gefäßes an Mark beträgt, so ist in jeder Mark x Loth Silber, und im ganzen Gefäße x^2 Loth Silber enthalten. Ferner ist, nach der Aufgabe, für das Loth reines Silber $x + 8$ gr., also für das ganze Gefäß $(x + 8) x^2$ gr. $= x^3 + 8x^2$ gr. bezahlt worden. Es ist also

$x^3 + 8x^2 = 120 \cdot 24$ gr. $= 2880$ gr.

oder $x^3 + 8x^2 - 2880 = 0$

Diese Gleichung hat nur eine mögliche Wurzel 12, folglich ist $x = 12$ Mark.

13.

Es mögen x Officiere seyn. Da nun jeder Offi-

cier 3x Cavalleristen und 7x Infanteristen hat, so haben die x Officiere $3x^2$ Cavalleristen und $7x^2$ Infanteristen; und da ferner jeder Cavallerist $x + 2$ Patronen, jeder Infanterist aber $x + 22$ Patronen hat, so haben die Cavalleristen $3x^2 (x + 2) = 3x^3 + 6x^2$ und die Infanteristen $7x^2 (x + 22) = 7x^3 + 154x^2$. Die sämmtlichen Patronen sind daher $= 3x^3 + 6x^2 + 7x^3 + 154x^2$.

Es ist also $3x^3 + 6x^2 + 7x^3 + 154x^2$
$= 10x^3 + 160x^2 = 15360$
oder $x^3 + 16x^2 - 1536 = 0$

Diese Gleichung hat nur eine rationale Wurzel 8, folgl. ist $x = 8$ Officiere.

14.

Die Ausgabe von vorgestern sey x rthlr., so hat er gestern 2x rthlr. und heute $x + 4$ rthlr. ausgegeben. Multiplicirt man diese drei Ausgaben mit einander und addirt 756 hinzu, so erhält man $x \cdot 2x (x + 4) + 756 = 2x^3 + 8x^2 + 756$, und dieses ist nach der Aufgabe gleich $134 (x + 4)$.

Es ist daher $2x^3 + 8x^2 + 756 = 134 (x + 4)$
$= 134x + 536$
oder $x^3 + 4x^2 - 67x + 110 = 0$

Diese Gleichung hat nur zwei positive Wurzeln, nämlich 2 und 5, folglich ist $x = 2$ oder 5, und also die heutige Ausgabe $= 6$ oder 9 rthlr.

15.

Die Anzahl der Kaufleute sey x. Da nun jeder 10x rthlr. beigetragen hat, so ist die ganze zusammengelegte Summe $x \cdot 10x = 10x^2$ rthlr. Nun sind die mit diesem Kapitale gewonnenen Procente $= x + 8$. Man setze daher $100 : x + 8 = 10x^2 : \frac{10x^2(x+8)}{100}$.

$$\text{Es ist also } \frac{10x^2\ (x+8)}{100} = \frac{x^2\ (x+8)}{10} = 288$$

$$\text{oder } x^3 + 8x^2 - 2880 = 0$$

$$\text{folgl. } x = 12 \text{ Kaufleute.}$$

16.

Wenn die Anzahl der Kaufleute $= x$ ist, so hat jeder von denselben 40x rthlr. und folglich haben alle zusammen $40x^2$ rthlr. zu den bereits vorhandenen 8240 rthlrn. zugelegt. Nun gewinnen sie mit dem Kapitale $40x^2 + 8240$, x Procent. Man setze also $100 : x = 40x^2 + 8240 : \frac{(40x^2+8240)x}{100}$. Der Gewinnst ist daher $= \frac{(40x^2+8240)\,x}{100}$. Hiervon bekommt jeder 10x und es bleiben noch 224 rthlr. übrig.

$$\text{Es ist also } \frac{(40x^2 + 8240)\ x}{100} = 10x^2 + 224$$

$$\text{oder } 40x^3 - 1000x^2 + 8240x - 22400 = 0$$

$$\text{oder } x^3 - 25x^2 + 206x - 560 = 0$$

Diese Gleichung hat drei rationale Wurzeln, nämlich 7, 8 und 10, folglich ist $x = 7$ oder 8 oder 10.

17.

Wenn A x rthlr. bei sich hat, so hat B $x+1$, C $x+2$ und D $x+3$ rthlr. bei sich. Das Product dieser vier Summen beträgt $x^4+6x^3+11x^2+6x$. Der Cubus von $x+3$ ist $x^3+9x^2+27x+27$.

Es ist daher $x^4+6x^3+11x^2+6x$

$$= x^3+9x^2+27x+27+1168$$

oder $x^4+5x^3+2x^2-21x-1195=0$

Diese Gleichung hat nur eine rationale Wurzel 5, folglich ist $x=5$ u. s. w.

18.

Der Tagelohn jedes einzelnen Arbeiters sey x gr. Es sind also überhaupt 3x Arbeiter gewesen, und der Tagelohn sämmtlicher Arbeiter hat $3x^2$ Groschen betragen. Da nun ferner in allem $3x^2 - 100$ Tage gearbeitet worden ist, so beträgt der gesammte Lohn $3x^2\,(3x^2-100) = 9x^4-300x^2$.

Es ist also $9x^4-300x^2 = 2500$ rthlr. $= 60000$ gr.

$$\text{oder } x^4 - \frac{100x^2}{3} - \frac{20000}{3} = 0$$

Schafft man die Brüche aus dieser Gleichung weg und verfährt, wie oben Abschn. V. B. §. 8. S. 135 gelehrt worden, so findet man

$x = 10$ gr. Tagelohn jedes einzelnen Arbeiters,

also die Anzahl der Arbeiter $= 30$

und die der Tage $= 200$

19.

Die größere Zahl sey x, so ist die kleinere 63—x. Dividirt man die größere durch die kleinere, multiplicirt mit der größern, und addirt $20\frac{1}{4}$, so erhält man $\frac{x}{63-x} \cdot x + 20\frac{1}{4}$. Dieser Ausdruck soll gleich seyn einer Cubikzahl, deren Wurzel $\frac{x}{7} - 1$ ist. Da nun $\left(\frac{x}{7}-1\right)^3$ eine solche Zahl ist, so ist

$$\frac{x^2}{63-x} + 20\frac{1}{4} = \left(\frac{x}{7}-1\right)^3$$

oder $\frac{x^2}{63-x} + 20\frac{1}{4} = \frac{x^3 - 21x^2 + 147x - 343}{343}$

oder $x^4 - 84x^3 + 1813x^2 - 16549\frac{3}{4}x + 459191\frac{1}{4} = 0$

Verfährt man mit dieser Gleichung nach dem in der vorigen Aufgabe erwähnten §. 8, so findet man

$x = 35$ für die größere Zahl,

und also die kleinere Zahl $= 28$

20.

Die Zeit, in welcher der Wasserbehälter durch die erste Röhre gefüllt wird, mag x Stunden betragen, so wird er durch die zweite Röhre in $x + 4$, durch die dritte in $x + 8$ und durch die vierte in $x + 12$ Stunden gefüllt. Da also die erste Röhre in x Stunden das ganze Gefäß füllt, so füllt sie in einer Stunde nur $\frac{1}{x}$ des Gefäßes, und aus demselben Grunde füllt die zweite Röhre in einer Stunde $\frac{1}{x+4}$,

die dritte $\frac{1}{x+8}$, und die vierte $\frac{1}{x+12}$ des Gefäßes. Die vier Röhren füllen also zusammen in einer Stunde $\frac{1}{x} + \frac{1}{x+4} + \frac{1}{x+8} + \frac{1}{x+12}$ $= \frac{4x^3 + 72x^2 + 352x + 384}{x^4 + 24x^3 + 176x^2 + 384x}$ des Gefäßes. Nun wird, nach der Aufgabe, der ganze Behälter durch die vier Röhren zusammen in einer Stunde $55\frac{1}{5}$ Minuten, das ist in $\frac{48}{25}$ Stunden gefüllt, folglich wird in einer Stunde $1 : \frac{48}{25} = \frac{25}{48}$ des Gefäßes gefüllt. Es ist demnach

$$\frac{4x^3 + 72x^2 + 352x + 384}{x^4 + 24x^3 + 176x^2 + 384x} = \frac{25}{48}$$

oder $192x^3 + 3456x^2 + 16896x + 18432$
$= 25x^4 + 600x^3 + 4400x^2 + 9600x$

oder $25x^4 + 408x^3 + 944x^2 - 7296x = 18432$

also $x^4 + \frac{408x^3}{25} + \frac{944x^2}{25} - \frac{7296x}{25} - \frac{18432}{25} = 0$

Verfährt man mit dieser Gleichung nach S. 135 §. 8, so findet man

$x = 4$ Stunden.

21.

Bei dieser Aufgabe sowohl als bei den nachfolgenden Aufgaben dieser Klasse, und zwar bis zur 35sten,

hat der Herr Verfasser der Beispielsammlung bereits die nöthigen Winke zu deren Auflösung selbst angegeben. Die nähere Bearbeitung derselben hat weiter keine Schwierigkeiten, am wenigsten für denjenigen, welcher die frühern Auflösungen bis hierher mit dem erforderlichen Nachdenken durchgenommen hat. Die weitern Auflösungen bleiben demnach hier weg, damit der Schüler Gelegenheit erhalte, die bereits erworbenen Kräfte zu üben.

X.

Auflösungen von den unbestimmten Aufgaben.

(Zu M. Hirsch Sammlung von Beispielen rc. XIX. Kapitel, S. 255 bis S. 271.)

1.

Da die Zahl durch 3 dividirt 1 übrig läßt, so muß sie die Form $3x + 1$ haben, und da sie durch 5 dividirt 2 übrig läßt, so muß sie zugleich die Form $5y + 2$ haben. Es ist also $3x + 1 = 5y + 2$ und $x = \frac{5y + 1}{3} = y + \frac{2y + 1}{3}$. Da nun x sowohl als y ganze Zahlen seyn sollen, so muß auch $\frac{2y + 1}{3}$ eine ganze Zahl seyn, d. h. $2y + 1$ muß durch 3 theilbar seyn. Man setze daher $2y + 1 = 3z$ oder $y = \frac{3z - 1}{2} = z + \frac{z - 1}{2}$. Da nun auch hier z eine ganze Zahl bedeutet, so muß auch $\frac{z - 1}{2}$ eine ganze Zahl, d. h. $z - 1$ muß durch 2 theilbar seyn. Es sey daher $z - 1 = 2n$ oder $z = 2n + 1$, so ist $y = \frac{6n + 3 - 1}{2} = 3n + 1$. Substituirt man die-

sen Werth von y in $5y + 2$, so erhält man für die Form der Zahlen, welche die Bedingungen der Aufgabe erfüllen, $15n + 7$. Setzt man also für n nach und nach alle mögliche Zahlen, wie sie von 0 an in der natürlichen Ordnung nach einander folgen, nämlich: 0, 1, 2, 3, 4 . . ., so erhält man eine arithmetische Progression, die sich mit 7 anfängt und 15 zur Differenz hat, und zwar: 7, 22, 37, 52, 67, 82 . . . wovon jedes einzelne Glied die in der Aufgabe verlangten Eigenschaften besitzt.

2.

Die Zahl muß sowohl die Form $8x + 5$ als auch $11y + 4$ haben. Es ist also $8x + 5 = 11y + 4$ und $x = \frac{11y - 1}{8} = y + \frac{3y - 1}{8}$. Man setze aus dem vorhergehenden Grunde $3y - 1 = 8z$, so ist $y = \frac{8z + 1}{3} = 2z + \frac{2z + 1}{3}$. Ferner setze man $2z + 1 = 3u$, so ist $z = \frac{3u - 1}{2} = u + \frac{u - 1}{2}$. Setzt man nun endlich $u - 1 = 2n$ oder $u = 2n + 1$, so ist $z = \frac{6n + 3 - 1}{2} = 3n + 1$ und $y = \frac{24n + 8 + 1}{3}$ $= 8n + 3$. Diesen Ausdruck in $11y + 4$ substituirt, giebt für die Form der gesuchten Zahlen $88n + 37$. Das ist eine arithmetische Progression, die sich mit 37 anfängt und 88 zur Differenz hat. Nämlich

37, 125, 213 . . . . .

3.

Die Zahlen müssen die Form $9x$, zugleich aber auch die Form $14y + 8$ haben. Es ist daher $9x = 14y + 8$ und $x = \frac{14y + 8}{9} = y + \frac{5y + 8}{9}$. Man setze $5y + 8 = 9z$, so ist $y = \frac{9z - 8}{5} = z + \frac{4z - 8}{5}$. Da nun $4z - 8$ durch 5 theilbar seyn muß, so muß auch das Viertel, nämlich $z - 2$, durch 5 theilbar seyn. Es sey also $z - 2 = 5n$ oder $z = 5n + 2$. Hieraus folgt $y = 9n + 2$, und die allgemeine Form für die gesuchten Zahlen ist also $126n + 36$, woraus man die Zahlen

36, 162, 288, 414, 540 . . . . . erhält.

4.

Die gesuchte Anzahl Eier muß die Form $15x + 4$ und zugleich $12y + 10$ haben. Es ist also $15x + 4 = 12y + 10$ und $y = \frac{15x - 6}{12} = \frac{5x - 2}{4} = x + \frac{x - 2}{4}$. Man setze $x - 2 = 4n$, so ist $x = 4n + 2$. Diesen Werth in $15x + 4$ substituirt, giebt die Form $60n + 34$. Nimmt man nun $n = 1$, so erhält man 94, also weniger als 100. Für $n = 3$ erhält man 214, also mehr als 200. Man kann daher für n nur 2 setzen, wo man 154 erhält. Diese Aufgabe läßt nur einen Fall zu, und ist daher als bestimmt anzusehen.

5.

Die gesuchte Anzahl Nüsse muß die Form $13x + 9$ und $17y + 14$ haben. Es ist daher $13x + 9 = 17y + 14$ und $x = \frac{17y + 5}{13} = y + \frac{4y + 5}{13}$. Man setze $4y + 5 = 13z$, so ist $y = \frac{13z - 5}{4} = 3z + \frac{z - 5}{4}$. Es sey ferner $z - 5 = 4n$ oder $z = 4n + 5$, so ist $y = 13n + 15$. Dieses in $17y + 14$ substituirt, giebt die Form $221n + 269$. Setzt man nun $n = 1$, so erhält man 490, also mehr als 400. Man kann daher für n nur 0 setzen, wodurch man 269 als die einzige mögliche Zahl erhält.

6.

Die gesuchten Zahlen müssen zuvörderst die Form $3x + 2$ und $7y + 3$ haben. Es ist also $3x + 2 = 7y + 3$ und $x = \frac{7y + 1}{3} = 2y + \frac{y + 1}{3}$. Nun sey $y + 1 = 3u$, so ist $y = 3u - 1$. Dieses in $7y + 3$ substituirt, giebt $21u - 4$. Da nun aber ferner die gesuchten Zahlen zugleich die Form $10z + 9$ haben müssen, so muß $21u - 4 = 10z + 9$ seyn, woraus man erhält $z = \frac{21u - 13}{10} = 2u + \frac{u - 13}{10}$. Es sey daher $u - 13 = 10n$, so ist $u = 10n + 13$, welcher Werth in $21u - 4$ substituirt, $210n + 269$ giebt. Für n lassen sich nun alle mögliche Zahlen, folglich auch

$n - 1$ setzen, in welchem Falle man $210n - 210 + 269 = 210n + 59$ erhält. Die Zahlen sind also

59, 269, 479 . . . . .

7.

Da die Zahlen durch 6 und 12 dividirt den Rest 1 übrig lassen, so muß ihre Form $12x + 1$ seyn. Zugleich müssen sie aber auch die Form $15y + 10$ haben. Es ist daher $12x + 1 = 15y + 10$ oder $x = \frac{15y + 9}{12} = \frac{5y + 3}{4} = y + \frac{y + 3}{4}$. Setzt man $y + 3 = 4n$, so ist $y = 4n - 3$. Es ist also die Form der gesuchten Zahlen $60n - 35$, oder, wenn man wie oben statt n, $n + 1$ setzt, $60n + 25$. Die gesuchten Zahlen sind also

25, 85, 145 . . . . .

8.

Die gesuchten Zahlen müssen die Formen $5x + 3$, $6y + 1$, $7z$ und $8p + 5$ haben. Es ist also $5x + 3 = 6y + 1$ und $x = \frac{6y - 2}{5} = y + \frac{y - 2}{5}$. Setzt man $y - 2 = 5u$, so ist $y = 5u + 2$. Dieses in $6y + 1$ substituirt, giebt eine neue Form $30u + 13$. Es ist daher $30u + 13 = 7z$ und $z = \frac{30u + 13}{7}$ $= 4u + \frac{2u + 13}{7}$. Nun sey $2u + 13 = 7q$, so ist $u = \frac{7q - 13}{2} = 3q + \frac{q - 13}{2}$. Setzt man $q - 13$

$= 2r$, so ist $q = 2r + 13$, und $u = 7r + 39$. Diesen Werth für u in $30u + 13$ substituirt, giebt wieder eine andere Form $210r + 1183$. Hieraus folgt die Gleichung $210r + 1183 = 8p + 5$, oder $p = \frac{210r + 1178}{8} = \frac{105r + 589}{4} = 26r + \frac{r + 589}{4}$. Nun sey $r + 589 = 4n$, so ist $r = 4n - 589$. Substituirt man dieses in $210r + 1183$, so erhält man endlich $840n - 122507$. Um nun diese Form so einzurichten, daß sie durch die kleinsten Zahlen angegeben werde, erwäge man, daß sich für n jede mögliche Zahl setzen läßt; man dividire also 122507 durch 840, und setze für n, n nebst dem um 1 vermehrten ganzen Theil des Quotienten, d. h. $n + 146$, so erhält man $840\,(n + 146) - 122507 = 840n + 122640 - 122507 = 840n + 133$. Die Zahlen sind also

133, 973, 1813, 2653 . . . . .

9.

Da die gesuchten Zahlen bei der Division mit 4, 6 und 9 den Rest 3 lassen sollen, so muß ihre Form $36x + 3$, zugleich aber auch $15y + 12$ seyn. Es ist also $36x + 3 = 15y + 12$ und $y = \frac{36x - 9}{15} = \frac{12x - 3}{5} = 2x + \frac{2x - 3}{5}$. Setzt man $2x - 3 = 5z$, so ist $x = \frac{5z + 3}{2} = 2z + \frac{z + 3}{2}$. Ist nun $z + 3 = 2n$, so ist $z = 2n - 3$ und $x = 5n - 6$. Substituirt man diesen Ausdruck in $36x + 3$, so erhält man für

die Form der gesuchten Zahlen $180n - 213$, welche Form man eben so wie vorher in die einfachere verwandeln kann, wenn man für n, $n + 2$ setzt, wo man $180(n + 2) - 213 = 180n + 360 - 213 = 180n + 147$ erhält. Die Zahlen sind demnach

147, 327, 507 .....

10.

Die gesuchte Anzahl der Mannschaft soll durch 5, 6 und 7 theilbar seyn, sie muß also die Form $210x$, zugleich aber auch die Formen $11y + 9$ und $13z - 8$ haben. Es ist also $210x = 11y + 9$ und $y = \frac{210x - 9}{11} = 19x + \frac{x - 9}{11}$. Man setze $x - 9 = 11p$, so ist $x = 11p + 9$, und dieses in $210x$ substituirt, giebt $2310p + 1890$. Nun ist ferner $2310p + 1890 = 13z - 8$. Folgl. $z = \frac{2310p + 1898}{13} = 177p + 146 + \frac{9p}{13}$. Man setze $9p = 13q$, so ist $p = \frac{13q}{9} = q + \frac{4q}{9}$; ferner sey $4q = 9n$, so ist $q = \frac{9n}{4} = 2n + \frac{n}{4}$. Setzt man endlich $n = 4r$, so ist $q = 9r$ und $p = 13r$. Dieses in $2310p + 1890$ substituirt, giebt $30030r + 1890$. Da nun, nach der Voraussetzung, das Regiment keine 2000 Mann stark ist, so kann man n nur $= 0$ setzen, und man erhält die gesuchte Anzahl $= 1890$.

11.

Die Anzahl der Mannschaft läßt bei der Division mit 2, 4, 8 und 10 den Rest 1 übrig; die Form dieser Zahl muß also seyn $40x + 1$. Sie läßt aber auch zugleich durch die Division mit 6 und 12 den Rest 5 übrig; die Form ist also $12y + 5$. Es ist demnach $40x + 1 = 12y + 5$ und $y = \frac{40x - 4}{12} = \frac{10x - 1}{3}$ $= 3x + \frac{x - 1}{3}$. Setzt man $x - 1 = 3n$, so ist $x = 3n + 1$, und dieses substituirt in $40x + 1$, giebt $120n + 41$. Da nun die Compagnie zwischen 100 und 200 Mann stark ist, so kann man für n nur 1 setzen. Man erhält demnach $120 + 41 = 161$ Mann.

12.

Die Zahl der zuerst gewonnenen Dukaten muß die Formen $3x + 2$ und $5y + 1$ haben. Es ist also $3x + 2 = 5y + 1$ und $x = \frac{5y - 1}{3} = y + \frac{2y - 1}{3}$. Man setze $2y - 1 = 3p$, so ist $y = \frac{3p + 1}{2} = p + \frac{p + 1}{2}$. Ist nun ferner $p + 1 = 2q$, so ist $p = 2q - 1$ und $y = 3q - 1$. Substituirt man dieses in $5y + 1$, so erhält man $15q - 4$. Beim zweiten Spiele muß die Zahl der übrig gebliebenen Dukaten die Form $77z + 3$ haben. Addirt man zu diesem Ausdruck die verlornen 6 Dukaten hinzu, so muß er dem vorigen, für

die zuerst gewonnenen Dukaten gefundenen Ausdrucke gleich seyn. Oder $15q - 4 = 77z + 9$ und $q = \frac{77z + 13}{15} = 5z + \frac{2z + 13}{15}$. Man setze $2z + 13 = 15r$, so ist $z = \frac{15r - 13}{2} = 7r + \frac{r - 13}{2}$. Ferner sey $r - 13 = 2n$, so ist $r = 2n + 13$ und $z = 15n + 91$. Substituirt man dieses in $77z + 9$, so erhält man $1155n + 7016$. Setzt man nun für n $n - 6$, so giebt dieses $1155\,(n - 6) + 7016 = 1155n - 6930 + 7016 = 1155n + 86$. Folglich ist die Anzahl der gewonnenen Dukaten entweder 86 oder 1241 oder 2396 u. s. w.

13.

Die beiden Zahlen mögen x und y seyn, so ist $17x = 26y + 7$ und $x = \frac{26y + 7}{17} = y + \frac{9y + 7}{17}$. Nun sey $9y + 7 = 17z$, so ist $y = \frac{17z - 7}{9} = z + \frac{8z - 7}{9}$. Man setze ferner $8z - 7 = 9u$, so ist $z = \frac{9u + 7}{8} = u + \frac{u + 7}{8}$. Setzt man endlich $u + 7 = 8p$, so ist $u = 8p - 7$, $z = 9p - 7$ und $y = 17p - 14$, oder, wenn man für p, $p + 1$ setzt, $y = 17p + 3$. Hieraus erhält man $x = 26p + 5$. Die beiden Zahlen sind also, je nachdem man für p nach und nach 0, 1, 2, 3 . . . . . setzt, 5 und 3, oder 31 und 20, oder 57 und 37 u. s. w.

14.

Es mögen von der ersten Art x und von der zweiten y Stück gewesen seyn, so ist $16x = 25y + 1$ und $x = \frac{25y+1}{16} = y + \frac{9y+1}{16}$. Man setze $9y + 1 = 16z$, so ist $y = \frac{16z-1}{9} = z + \frac{7z-1}{9}$. Ferner sey $7z - 1 = 9p$, so ist $z = \frac{9p+1}{7} = p + \frac{2p+1}{7}$. Nun sey $2p + 1 = 7q$, so ist $p = \frac{7q-1}{2} = 3q + \frac{q-1}{2}$. Ist nun endlich $q - 1 = 2n$, so ist $q = 2n + 1$, $p = 7n + 3$, $z = 9n + 4$ und $y = 16n + 7$. Hieraus erhält man auch $x = 25n + 11$. Die gesuchte Anzahl von Kanonenröhren ist also 11 und 7 oder 36 und 23 u. s. w.

15.

Die Anzahl der Siebener sey x und die der Siebzehner y, so ist $7x = 17y + 120$ und $x = \frac{17y+120}{7} = 2y + \frac{3y+120}{7}$. Man setze $3y + 120$ oder $y + 40 = 7n$, so ist $y = 7n - 40$ oder $= 7(n+6) - 40 = 7n + 42 - 40 = 7n + 2$ und $x = 17n + 22$. Dieses giebt 22 Siebener gegen 2 Siebzehner

39	„	„ 9 „
56	„	„ 16 „

u. s. w.

16.

Die drei Zahlen mögen x, y und z seyn, so ist I. $7x+1 = 9y$ und II. $7x = 11z+2$. Beide Gleichungen von einander abgezogen, geben $9y - 11z - 2 = 1$ oder $9y = 11z + 3$ und $y = \frac{11z+3}{9} = z + \frac{2z+3}{9}$. Man setze $2z + 3 = 9p$, so ist $z = \frac{9p-3}{2} = 4p + \frac{p-3}{2}$. Ferner sey $p - 3 = 2r$, so ist $p = 2r+3$, $z = 9r + 3$ und $y = 11r+4$. Substituirt man diesen Werth von y in (I.), so erhält man $99r + 36 = 7x + 1$, und also $x = \frac{99r+35}{7} = \frac{99r}{7} + 5 = 14r + 5 + \frac{r}{7}$. Man setze $r = 7n$, so ist $x = 99n + 5$, und substituirt man diesen Werth in den für z und y gefundenen Ausdrücken, so erhält man $z = 63n + 3$ und $y = 77n + 4$. Die gesuchten Zahlen sind also 5, 4, 3 oder 104, 81, 66 oder 203, 158, 129 u. s. w.

17.

Die Zahlen mögen x, y und z seyn, so ist I. $19x = 10y + 7$ und II. $19x = 8z + 15$; folglich $8z + 15 = 10y + 7$ und $z = \frac{10y-8}{8} = \frac{5y-4}{4} = y - 1 + \frac{y}{4}$. Man setze III. $y = 4p$, so ist IV. $z = 5p - 1$. Substituirt man ferner den in (III.) gefundenen Werth von y in (I.), so erhält man

$19x = 40p + 7$ und V. $x = \frac{40p+7}{19} = 2p + \frac{2p+7}{19}$

Man setze $2p + 7 = 19r$, so ist $p = \frac{19r-7}{2} = 9r + \frac{r-7}{2}$. Ferner sey $r - 7 = 2n$, so ist $r = 2n + 7$ und $p = 19n + 63$. Substituirt man nun diesen gefundenen Werth von p in die Gleichungen V. III. und IV., so erhält man

$$x = 40n + 133 = 40\ (n-3) + 133 = 40n + 13$$
$$y = 76n + 252 = 76\ (n-3) + 252 = 76n + 24$$
$$z = 95n + 314 = 95\ (n-3) + 314 = 95n + 29$$

Die gesuchten Zahlen sind also: 13 Männer, 24 Weiber und 29 Kinder, oder 53 Männer, 100 Weiber und 124 Kinder ꝛc.

18.

Da der eine Theil durch 9 und der andere durch 14 theilbar seyn soll, so muß die Form des erstern Theils 9x und die des letztern 14y seyn. Es ist also $9x + 14y = 142$ und $x = \frac{142-14y}{9} = 15 - y + \frac{7-5y}{9}$. Man setze $7 - 5y$, oder (weil es hier nur darauf ankömmt, daß der Unterschied zwischen 7 und 5y durch 9 theilbar sey, ohne darauf zu sehen, ob dieser Unterschied positiv oder negativ ist) $5y - 7 = 9z$, so ist $y = \frac{9z+7}{5} = z + 1 + \frac{4z+2}{5}$. Man setze ferner $4z + 2$ oder $2z + 1 = 5p$, so ist $z = \frac{5p-1}{2}$

$= 2p + \frac{p-1}{2}$. Ist nun endlich $p - 1 = 2n$, so ist $p = 2n + 1$, $z = 5n + 2$, woraus sich ergiebt $y = 9n + 5$. Nun erhellet aus der Gleichung $x = \frac{142 - 14y}{9}$, daß 14y kleiner als 142, und folglich y nicht größer als 10 seyn muß. Man darf also für n nichts anders als 0 setzen, welches nur den einzigen Werth $y = 5$ giebt. Es ist daher $14y = 70$ der eine Theil, und folglich 72 der andere Theil.

19.

Da der eine Theil durch 23 und der andere durch 34 theilbar seyn soll, so muß die Form des ersten Theils 23x und die des andern 34y seyn. Es ist also $23x + 34y = 1591$ und $x = \frac{1591 - 34y}{23} = 69 - y + \frac{4 - 11y}{23}$. Man setze $11y - 4 = 23z$, so ist $y = \frac{23z + 4}{11} = 2z + \frac{z + 4}{11}$. Ist also $z + 4 = 11n$, so ist $z = 11n - 4$ und $y = 23n - 8$ oder $23n + 15$. Nun erhellet aus der Gleichung $x = \frac{1591 - 34y}{23}$, daß 34y kleiner als 1591, und also y nicht größer als 46 seyn muß. Man kann daher für n nur entweder 0 oder 1 annehmen, und man erhält für den einen Theil entweder 510 und folglich für den andern 1081, oder 1292 und 299.

20.

Hier müssen beide Theile die Form $37x + 3$ und

$54y + 6$ haben. Folglich $37x + 54y + 9 = 4890$ und also $x = \frac{4881 - 54y}{37} = 131 - y + \frac{34 - 17y}{37}$. Man setze $17y - 34 = 37z$, so ist $y = \frac{37z + 34}{17}$ $= 2z + 2 + \frac{3z}{17}$. Es sey $3z = 17p$, so ist $z = \frac{17p}{3}$ $= 5p + \frac{2p}{3}$. Es sey ferner $2p = 3q$, so ist $p =$ $\frac{3q}{2} = q + \frac{q}{2}$. Ist nun $q = 2n$, so ist $p = 3n$, $z = 17n$ und $y = 37n + 2$. Aus der Gleichung $x = \frac{4881 - 54y}{37}$ gehet hervor, daß y nicht größer als 90 seyn darf; man kann daher für n nur 0, 1, 2 setzen, wodurch man 114 und 4776, oder 2112 und 2778, oder 4110 und 780 erhält.

21.

Die Anzahl der Männer sey x und die der Weiber y, so ist $19x + 13y = 876$ gr. und $y = \frac{876 - 19x}{13}$ $= 67 - x + \frac{5 - 6x}{13}$. Man setze $6x - 5 = 13z$, so ist $x = \frac{13z + 5}{6} = 2z + \frac{z + 5}{6}$. Ist daher $z + 5 = 6n$, so ist $z = 6n - 5$ und $x = 13n - 10$ oder $13n + 3$. Nun ergiebt sich aus der Gleichung $y = \frac{876 - 19x}{13}$ daß x nicht größer als 46 seyn darf; es kann daher für n nur 0, 1, 2, 3 gesetzt werden. Es sind daher 3 Männer und folglich 63 Weiber, oder 16 Männer und 44 Weiber, oder 29 Männer und 25 Weiber, oder 42 Männer und 6 Weiber.

22.

Die Anzahl der Pferde sey x und die der Ochsen y, so ist $31x + 21y = 1770$ und $y = \frac{1770 - 31x}{21}$ $= 84 - x + \frac{6 - 10x}{21}$. Man setze $10x - 6$ oder $5x - 3 = 21z$, so ist $x = \frac{21z + 3}{5} = 4z + \frac{z + 3}{5}$. Ist nun $z + 3 = 5n$, so ist $z = 5n - 3$ und $x = 21n - 12$ oder $21n + 9$. Da nun aus der Gleichung $y = \frac{1770 - 31x}{21}$ erhellet, daß x nicht größer als 57 seyn darf, so kann man auch für n nur 0, 1, 2 setzen. Es sind also 9 Pferde und 71 Ochsen, oder 30 Pferde und 40 Ochsen, oder 51 Pferde und 9 Ochsen.

23.

Die Anzahl der Schweine sey x, die der Ziegen y und die der Schafe z, so ist

$$\text{I. } 4\tfrac{1}{2}x + 3\tfrac{1}{6}y + 1\tfrac{1}{4}z = 400$$

$$\text{und II. } x + y + z = 124$$

Multiplicirt man die Gleichung (II.) mit $4\frac{1}{2}$ und ziehet hiervon die Gleichung (I.) ab, so erhält man $\frac{8y}{6} + \frac{13z}{4} = 158$ oder $16y + 39z = 1896$ und $y = \frac{1896 - 39z}{16} = 118 - 2z + \frac{8 - 7z}{16}$. Man setze $7z - 8 = 16p$, so ist $z = \frac{16p + 8}{7} = 2p + 1 + \frac{2p + 1}{7}$. Es sey ferner $2p + 1 = 7q$, so ist $p = \frac{7q - 1}{2}$

$= 3q + \frac{q-1}{2}$. Ist endlich $q - 1 = 2n$, so ist $q = 2n + 1$, $p = 7n + 3$, $z = 16n + 8$, $y = 99 - 39n$ und $x = 23n + 17$. Aus der vorletzten Gleichung folgt, daß wenn y positiv seyn soll, n nicht größer als 2 angenommen werden darf. Man kann daher für n nur setzen 0, 1, 2, und dieses giebt 8 Schafe, 99 Ziegen und 17 Schweine; oder 24 Schafe, 60 Ziegen und 40 Schweine; oder 40 Schafe, 21 Ziegen und 63 Schweine.

24.

Die Theile mögen x, y und z seyn, so ist

$$\text{I.} \quad 7x + 19y + 38z = 745$$
$$\text{und II.} \quad x + y + z = 30$$

Multiplicirt man die Gleichung (II.) mit 7 und ziehet sie von der Gleichung (I.) ab, so bleibt $12y + 31z = 535$ und $y = \frac{535 - 31z}{12} = 44 - 2z + \frac{7 - 7z}{12}$. Man setze $7z - 7$ oder $z - 1 = 12n$, so ist $z = 12n + 1$, $y = 42 - 31n$, $x = 19n - 13$. Nun ergiebt sich aus $y = 42 - 31n$, daß n nicht größer als 1, und aus $x = 19n - 13$, daß n nicht kleiner als 1 angenommen werden darf; man kann also für n nichts anders als 1 setzen, und dieses giebt die Theile $x = 6$, $y = 11$ und $z = 13$.

25.

Wenn die Theile x, y und z sind, so ist

$$\text{I.} \quad 17x + 11y + 3z = 880$$
$$\text{und II.} \quad x + y + z = 100$$

Multiplicirt man die Gleichung (II.) mit 3 und ziehet sie von (I.) ab, so bleibt $14x + 8y = 580$ und $y = \frac{290 - 7x}{4} = 72 - x + \frac{2 - 3x}{4}$. Man setze $3x - 2 = 4p$, so ist $x = \frac{4p + 2}{3} = p + \frac{p + 2}{3}$. Ist nun $p + 2 = 3n$, so ist $p = 3n - 2$, $x = 4n - 2$, $y = 76 - 7n$ und $z = 3n + 26$. Nun ergiebt sich aus $x = 4n - 2$, daß n nicht 0, und aus $y = 76 - 7n$, daß n nicht größer als 10 seyn darf, die gesuchten Theile können daher auf 10 verschiedene Arten bestimmt werden, nämlich 2, 69, 29; 6, 62, 32; 10, 55, 35 u. s. w.

26.

Wenn die Zahlen x, y und z sind, so ist

$$\text{I.} \quad 5x + 13y + 18z = 997$$
$$\text{II.} \quad 11x + 20y + 37z = 1866$$

Multiplicirt man die erste Gleichung mit 11 und die zweite mit 5, und ziehet (II.) von (I.) ab, so bleibt $43y + 13z = 1637$ und $z = \frac{1637 - 43y}{13} = 125 - 3y + \frac{12 - 4y}{13}$. Man setze $4y - 12$ oder $y - 3 = 13n$, so ist $y = 13n + 3$, $z = 116 - 43n$ und $x = 121n - 226$. Aus $z = 116 - 43n$ ergiebt sich, daß n nicht größer als 2, und aus $x = 121n - 226$ ergiebt sich, daß n nicht kleiner als 2 angenommen werden darf; man kann daher für n nur 2 setzen, und die gesuchten Zahlen sind also 16, 29, 30.

27.

Es mögen x Gänse, y Hühner, z Enten und v Tauben gewesen seyn, so ist

$$\text{I.}\quad x + y + z + v = 76$$

$$\text{und II.}\quad 20x + 10\tfrac{1}{2}y + 7z + 4v = 707$$

Multiplicirt man die Gleichung (I.) mit 4 und subtrahirt sie von (II), so bleibt $16x + 6\frac{1}{2}y + 3z = 403$ oder $32x + 13y + 6z = 806$ und $z = \frac{806 - 32x - 13y}{6}$ $= 134 - 5x - 2y + \frac{2 - 2x - y}{6}$. Man setze $2 - 2x - y = 6p$, so ist $y = 2 - 2x - 6p$. Nun kann man für x und p jede beliebige ganze Zahl und für p sogar eine negative Zahl annehmen; nur muß man es so einrichten, daß $32x + 13y$ kleiner als 806 und $x + y + z$ kleiner als 76 werde. Nimmt man daher z. E. $p = -8$ und $x = 2$, so ist $y = 46$, $z = 24$, $v = 4$. Für $p = -8$ und $x = 10$ ist $y = 30$, $z = 16$ und $v = 20$ u. s. w.

28.

Es mögen x Männer, y Weiber und z Kinder gewesen seyn, so ist

$$\text{I.}\quad 84x + 33y + 6z = 1392$$

$$\text{und II.}\quad x + y + z = 30$$

Multiplicirt man die Gleichung (II.) mit 6 und ziehet sie von (I.) ab, so bleibt $78x + 27y = 1212$ und $y = \frac{1212 - 78x}{27} = 44 - 2x + \frac{24 - 24x}{27}$. Man

setze $24x - 24 = 27p$, so ist $x = \frac{27p + 24}{24} = 1 + p + \frac{3p}{24}$. Ist nun $3p = 24n$, so ist $p = 8n$, $x = 9n + 1$, $y = 42 - 26n$, $z = 17n - 13$. Nun ergiebt sich aus $y = 42 - 26n$, daß n nicht größer als 1, und aus $z = 17n - 13$, daß n nicht kleiner als 1 angenommen werden darf. Man kann daher für n nur 1 setzen, und dieses giebt 10 Männer, 16 Weiber und 4 Kinder.

29.

Sind die Zahlen x und y, so ist $xy = x + y$ und $y = \frac{x}{x - 1}$. Hier kann man nun für x jeden beliebigen Werth annehmen, so wird sich y daraus bestimmen. Ist z. E. $x = 2$, so ist $y = 2$; ist $x = 3$, so ist $y = 1\frac{1}{2}$; ist $x = 1\frac{2}{3}$, so ist $y = 2\frac{1}{2}$ u. s. w.

30.

Die Zahlen seyen x und y. Es ist demnach

$$x + y : xy = m : n$$

$$\text{also } nx + ny = mxy$$

$$\text{folgl. } y = \frac{nx}{mx - n}$$

31.

Sind die Zahlen x und y, so ist $xy + x + y = 139$ und $y = \frac{139 - x}{x + 1} = -1 + \frac{140}{x + 1}$. Es muß also, wenn y eine ganze Zahl seyn soll, $x + 1$ in 140

aufgehen; man braucht also nur die Theiler von 140 zu suchen, um hiernach x und y zu bestimmen. Nun sind die Theiler 2, 4, 5, 7, 10 u. s. w.

Ist daher $x = 1$, so ist $y = -1 + \frac{140}{1+1} = 69$,

für $x = 3$ ist $y = -1 + \frac{140}{3+1} = 34$

u. s. w.

32.

Sind die Zahlen x und y, so ist $xy = 2(x-y) + 100$ oder $y(x+2) = 100 + 2x$ und $y = \frac{100+2x}{x+2} = 2 + \frac{96}{x+2}$. Es muß daher $x+2$ ein Theiler von 96 seyn. Man erhält also für $x = 10$, $y = 2 + \frac{96}{10+2} = 10$; für $x = 14$, $y = 2 + \frac{96}{14+2} = 8$; für $x = 22$, $y = 2 + \frac{96}{22+2} = 6$ u. s. w.

33.

Wenn man die Zähler der gesuchten Brüche x und y nennt, so ist $\frac{x}{7} + \frac{y}{11} = \frac{230}{77}$ oder $\frac{11x + 7y}{77} = \frac{230}{77}$, folglich $11x + 7y = 230$ und $y = \frac{230-11x}{7} = 32 - x + \frac{6-4x}{7}$. Man setze $4x - 6$ oder $2x - 3 = 7z$, so ist $x = \frac{7z+3}{2} = 3z + \frac{z+3}{2}$. Ist nun $z + 3 = 2n$, so ist $z = 2n - 3$, $x = 7n - 9$ und $y = 47 - 11n$. Aus $x = 7n - 9$ ergiebt sich, daß n nicht kleiner als 2, und aus $y = 47 - 11n$,

daß n nicht größer als 4 angenommen werden darf. Man kann daher für n nur setzen 2, 3 und 4, und dieses giebt $\frac{5}{7}$ und $\frac{25}{11}$, oder $\frac{12}{7}$ und $\frac{14}{11}$, oder $\frac{19}{7}$ und $\frac{3}{11}$.

34.

Die beiden Zahlen mögen z und y seyn, so muß $z^2 + y^2$ und folglich auch $\frac{z^2 + y^2}{y^2} = \frac{z^2}{y^2} + 1$ ein Quadrat seyn. Setzt man nun $\frac{z}{y} = x$, so ist $\frac{z^2}{y^2} = x^2$. Es ist daher auch die Summe $x^2 + 1$ eine Quadratzahl. Da nun dieser Ausdruck eine Quadratzahl seyn soll, so muß sich die Wurzel hiervon in rationalen Zahlen angeben lassen. Es sey daher $\sqrt{(x^2 + 1)} = x + m$ oder $x^2 + 1 = x^2 + 2mx + m^2$, oder $2mx + m^2 = 1$ und $x = \frac{1 - m^2}{2m}$. Da man nun unter m eine jede mögliche Zahl und also auch Brüche verstehen kann, so setze man $m = \frac{q}{p}$, folglich ist

$$x = \frac{1 - \frac{q^2}{p^2}}{\frac{2q}{p}} = \frac{p^2 - q^2}{2pq}.$$

Es ist also $x^2 + 1 =$

$$\frac{p^4 - 2p^2q^2 + q^4}{4p^2q^2} + 1 = \frac{(p^2 - q^2)^2}{(2pq)^2} + 1 = \frac{p^4 + 2p^2q^2 + q^4}{4p^2q^2}$$

$= \frac{(p^2 + q^2)^2}{(2pq)^2}$. Multiplicirt man nun die Gleichung $\frac{(p^2 - q^2)^2}{(2pq)^2} + 1 = \frac{(p^2 + q^2)^2}{(2pq)^2}$ durch den Nenner $(2pq)^2$, so erhält man $(p^2 - q^2)^2 + (2pq)^2 =$

$(p^2 + q^2)^2$. Die gesuchten Zahlen müssen also die Form $p^2 - q^2$ und $2pq$ haben, und die Zahlen selbst müssen entweder 3 und 4, oder 6 und 8, oder 5 und 12 u. s. w. seyn.

35.

Diese Aufgabe und die folgenden bis incl. Nr. 43 hat der Herr Verfasser der Beispielsammlung zum Theil bereits selbst aufgelöst, weshalb die speciellen Auflösungen hier weggeblieben sind.

44.

Sind die drei gesuchten Zahlen x, y und z, so setze man I. $x + y + z = p^2$, $x + y = q^2$, $x + z = r^2$ und $y + z = s^2$. Es ist einleuchtend, daß man x, y und z kennt, sobald q, r und s bekannt sind. Da man nun für q, r und s jede beliebige Zahl, die jedoch der Gleichung (I.) Genüge leiste, setzen kann, so sey $q = p - 1$, $r = p - 2$, $s = p - 3$. Es ist also $x + y = (p-1)^2 = p^2 - 2p + 1$. Subtrahirt man diese Gleichung von (I.), so erhält man $z = 2p - 1$. Ferner ist $x + z = (p - 2)^2 = p^2 - 4p + 4$. Subtrahirt man dieses von (I.), so erhält man $y = 4p - 4$. Setzt man die beiden für y und z gefundenen Werthe in die Gleichung $y + z = s^2$, so giebt dieses $6p - 5 = s^2$ und $p = \frac{s^2 + 5}{6}$, $z = \frac{s^2 + 2}{3}$, $y = \frac{2s^2 - 2}{3}$. Für s läßt sich nun jede Zahl, welche für z und y einen rationalen

und positiven Werth giebt, setzen. Nimmt man z. E. $s = 11$, so ist $z = 41$, $y = 80$ und $x = 320$. Für $s = 8$ ist $z = 22$, $y = 42$ und $x = 68\frac{1}{4}$ u. s. w.

45.

Es seyen die beiden Zahlen x und y, so ist $x - y = x^3 - y^3$. Dividirt man die ganze Gleichung durch $x - y$, so erhält man $1 = x^2 + xy + y^2$ oder $x^2 + xy = 1 - y^2$; folglich ist $x = -\frac{1}{2}y \pm \sqrt{(1 - \frac{3}{4}y^2)}$. Soll daher x eine rationale Zahl seyn, so muß auch $\sqrt{(1 - \frac{3}{4}y^2)}$ rational seyn. Es sey daher $\sqrt{(1 - \frac{3}{4}y^2)} = 1 - my$ oder $1 - \frac{3}{4}y^2 = (1 - my)^2$, und dieses giebt $y = \frac{2m}{m^2 + \frac{3}{4}}$. Man kann für m unendlich viele Zahlen setzen, wodurch man immer einen Werth für y und folglich auch für x erhält. Für $m = \frac{1}{6}$ ist $x = \frac{5}{7}$ und $y = \frac{3}{7}$; für $m = \frac{1}{4}$ ist $x = \frac{8}{13}$ und $y = \frac{7}{13}$; für $m = \frac{1}{10}$ ist $x = \frac{16}{19}$ und $y = \frac{5}{19}$ u. s. w.

46.

Es lassen sich alle mögliche Zahlen durch $2n$ und $2n + 1$ ausdrücken. Da nun die Quadrate hiervon $4n^2$ und $4n^2 + 4n + 1$ sind, so lassen alle mögliche Quadratzahlen durch die Division mit 2 nur entweder 0 oder 1 übrig. Ferner lassen sich alle mögliche Zahlen durch $3n$, $3n + 1$ und $3n + 2$ ausdrücken; die Quadrate hiervon sind $9n^2$, $9n^2 + 6n + 1$, und $9n^2 + 12n + 4$. Dividirt man diese Quadrate mit 3, so bleiben auch hier die Reste 0 oder 1. Eben so

lassen sich alle mögliche Zahlen durch 4n, 4n + 1, 4n + 2 und 4n + 3 ausdrücken. Die Quadrate hiervon sind $16n^2$, $16n^2 + 8n + 1$, $16n^2 + 16n + 4$, $16n^2 + 24n + 9$. Diese Quadrate lassen ebenfalls bei der Division mit 4 die Reste 0 oder 1. Drückt man aber die Zahlen durch 5n, 5n + 1, 5n + 2, 5n + 3 und 5n + 4 aus, so sind die Quadrate hiervon $25n^2$, $25n^2 + 10n + 1$, $25n^2 + 20n + 4$, $25n^2 + 30n + 9$ und $25n^2 + 40n + 16$. Diese Quadrate lassen bei der Division mit 5 die Reste 0, 1, 4. Fährt man auf diese Art fort, und drückt sämmtliche Zahlen durch 6n, 6n + 1, 6n + 2, 6n + 3, 6n + 4, 6n + 5, oder durch 7n, 7n + 1, 7n + 2, 7n + 3, 7n + 4, 7n + 5, 7n + 6 u. s. w. aus, so siehet man bald, daß die ersten beiden Glieder des Quadrats immer durch 6, 7 u. s. w. theilbar sind, und daß es also nur darauf ankömmt, daß man die Quadrate von den Zahlen 1, 2, 3, 4 und 5, oder von den Zahlen 1, 2, 3, 4, 5 und 6 u. s. w. durch 6 oder 7 u. s. w. dividirt, wodurch man die Reste 1, 3, 4 oder 1, 2, 4 u. s. w. erhält. Es bleiben also bei der Division mit 6 die Reste 0, 1, 3, 4; für 7 die Reste 0, 1, 2, 4; für 8 die Reste 0, 1, 4; für 9 die Reste 0, 1, 4, 7; für 10 die Reste 0, 1, 4, 5, 6 und 9 u. s. w.

47.

Es lassen sich sämmtliche Zahlen durch 7n, 7n + 1, 7n + 2, 7n + 3, 7n + 4, 7n + 5 und 7n + 6 aus-

drücken. Hiervon sind die Kubikzahlen $343n^3$, $343n^3 + 147n^2 + 21n + 1$, $343n^3 + 294n^2 + 84n + 8$ u. s. w. Hieraus ergiebt sich nun, daß wenn man die hier aufgestellten allgemeinen Zahlenausdrücke kubirt, die ersten drei Glieder dieser Kubikzahlen immer durch 7 theilbar sind, und daß es also nur auf das letzte Glied, nämlich auf den Kubus von 1, 2, 3, 4, 5 und 6, das ist auf 1, 8, 27, 64, 125 und 216 ankömmt. Dividirt man also in diese Zahlen mit 7, so erhält man 1 oder 6 zum Rest. Alle Kubikzahlen lassen daher bei der Division mit 7 die Reste 0, 1, 6. Ferner lassen sich alle Zahlen durch $8n$, $8n + 1$, $8n + 2$, $8n + 3$, $8n + 4$, $8n + 5$, $8n + 6$ und $8n + 7$ ausdrücken. Es kömmt also hier nur darauf an, daß man die Zahlen 1, 2, 3, 4, 5, 6 und 7 kubirt und die Kuben 1, 8, 27, 64, 125, 216 und 343 durch 8 dividirt, wodurch man die Reste 0, 1, 3, 5 und 7 erhält. Alle Kubikzahlen lassen daher bei der Division mit 8 die Reste 0, 1, 3, 5, 7. Auf gleiche Art findet man bei der Division mit 9 die Reste 0, 1, 8.

48.

Diese Aufgabe und die folgenden bis zu Ende dieses Kapitels sind ebenfalls durch den Herrn Verfasser aufgelöst.

XI.

Auflösungen der Aufgaben, die Progressionen und die figurirten Zahlen betreffend.

(Zu M. Hirsch Sammlung von Beispielen ꝛc. XX. Kapitel, von S. 272 bis 284.)

1.

In dieser Aufgabe ist das erste Glied $a = 30$, die Differenz $d = 4\frac{1}{2}$ und die Anzahl der Glieder $n = 17$ einer arithmetischen Progression gegeben, und das letzte Glied t nebst der Summe s wird gesucht. Nun sind in der gedachten Beispielsammlung S. 104 für die arithmetischen Progressionen die Formeln

$$t = a + (n - 1)\,d$$

$$s = \tfrac{1}{2}n\,(a + t) = \tfrac{1}{2}n\,[2a + (n - 1)\,d]$$

angegeben. Man braucht daher nur in diesen Formeln die hier gegebenen Größen zu substituiren. Es ist demnach

$t = 30 + (17 - 1)\,4\frac{1}{2}$
$\quad = 102$ rthlr. der Lohn im 17ten Jahre
und $s = \frac{1}{2} \cdot 17 \cdot (30 + 102)$
$\quad = 1122$ rthlr. der gesammte Lohn.

2.

Hier ist a = 2 rthlr., d = $4\frac{1}{2}$ gr. und n = 16 gegeben, woraus man findet

$$t = 2 \text{ rthlr.} + (16 - 1)\, 4\tfrac{1}{2} \text{ gr.}$$
$$= 4 \text{ rthlr. } 19\tfrac{1}{2} \text{ gr.}$$ Ausgabe des 16ten Tages

und $s = \frac{1}{2} \cdot 16\, (2 \text{ rthlr.} + 4 \text{ rthlr. } 19\frac{1}{2} \text{ gr.})$
$$= 54 \text{ rthlr. } 12 \text{ gr.}$$ gesammte Ausgabe.

3.

Hier ist a = 17, d = $\frac{1}{6}$ und n = 30. Es ist demnach

$$t = 17 + (30 - 1)\, \tfrac{1}{6}$$
$$= 21 \text{ gr. } 10 \text{ pf.}$$ Arbeitslohn für den letzten Fuß

und $s = \frac{1}{2} \cdot 30\, (17 \text{ gr.} + 21 \text{ gr. } 10 \text{ pf.})$
$$= 24 \text{ rthlr. } 6 \text{ gr. } 6 \text{ pf.}$$ Arbeitslohn für den ganzen Brunnen.

4.

Das erste Jahr betragen die Zinsen $\frac{1}{25} \cdot 3500 = 140$ rthlr. = a. Jedes Jahr kommen 300 rthlr. hinzu, hiervon betragen die Zinsen $\frac{1}{25} \cdot 300 = 12 = d$. Ferner ist n = 24. Es ist demnach

$$s = \tfrac{1}{2} \cdot 24\, [2 \cdot 140 + (24 - 1)\, 12]$$
$$= 6672 \text{ rthlr.}$$ sämmtliche Interessen.

5.

Hier ist d = $\frac{1}{4}$, t = $14\frac{1}{2}$ und n = 19 gegeben, und a und s soll gefunden werden. Man findet

in der Formeltafel für die arithmetischen Progressionen (siehe Meier Hirsch, Beispielsammlung S. 105) Nr. 17

$$a = t - (n - 1)\, d$$

und folgl. $a = 14\tfrac{1}{2} - (19 - 1)\,\tfrac{1}{4}$

$= 10$ Meilen für den ersten Tag

und $s = \tfrac{1}{2}n\,(a + t) = \tfrac{1}{2}\cdot 19\,(10 + 14\tfrac{1}{2})$

$= 232\tfrac{3}{4}$ Meilen, Länge des ganzen Weges.

6.

Gegeben ist $a = 1$, $t = 15$ und $n = 22$; gesucht wird d. Nun ist nach der Formeltafel Nr. 9

$$d = \frac{t - a}{n - 1}$$

$$\text{folgl. } d = \frac{15 - 1}{22 - 1} = \frac{14}{21} = \frac{2}{3}$$

7.

Gegeben ist $a = 5$, $t = 302$ und $d = 3$; gesucht wird n. Nach der Formeltafel Nr. 13 ist

$$n = 1 + \frac{t - a}{d} = 1 + \frac{302 - 5}{3} = 100 \text{ Glieder.}$$

8.

Gegeben ist $a = 100$, $t = 550$ und $d = 30$; gesucht wird n. Es ist wie vorher

$$n = 1 + \frac{550 - 100}{30} = 16 \text{ Jahre.}$$

9.

Gegeben ist $a = 600$, $d = 50$ und $s = 12950$; gesucht wird n und t. Nach der Formeltafel Nr. 2 ist

$$t = -\frac{1}{2}d + \sqrt{[2ds + (a - \frac{1}{2}d)^2]}$$

also $t = -\frac{1}{2} \cdot 50 + \sqrt{[2 \cdot 50 \cdot 12950 + (600 - \frac{1}{2} \cdot 50)^2]}$

$= -25 + \sqrt{1625625} = 1250$ rthlr. für den letzten Monat

und nach Nr. 15, $n = \frac{2s}{a+t} = \frac{2 \cdot 12950}{600 + 1250} = 14$ Monat.

10.

Gegeben ist $a = 15\frac{5}{8}$, $d = 31\frac{1}{4}$ und $n = 20$; gesucht wird t und s. Nach der Formeltafel Nr. 1 ist

$t = a + (n-1)\,d = 15\frac{5}{8} + (20-1)\,31\frac{1}{4}$

$= 609\frac{3}{8}$ Fuß für die letzte Secunde

und $s = \frac{1}{2}n\,(a+t) = \frac{1}{2} \cdot 20\,(15\frac{5}{8} + 609\frac{3}{8})$

$= 6250$ Fuß der ganze durchlaufene Raum.

11.

Gegeben ist $a = 15\frac{5}{8}$, $d = 31\frac{1}{4}$ und $s = 4000$; gesucht wird n. Nach der Formeltafel Nr. 14 ist

$$n = \frac{d - 2a}{2d} + \sqrt{\left[\frac{2s}{d} + \left(\frac{2a-d}{2d}\right)^2\right]}$$

also $n = \frac{31\frac{1}{4} - 2 \cdot 15\frac{5}{8}}{2 \cdot 31\frac{1}{4}} + \sqrt{\left[\frac{2 \cdot 4000}{31\frac{1}{4}} + \left(\frac{2 \cdot 15\frac{5}{8} - 31\frac{1}{4}}{2 \cdot 31\frac{1}{4}}\right)^2\right]}$

$= \sqrt{\frac{2 \cdot 4000}{31\frac{1}{4}}} = \sqrt{\frac{6400}{25}} = 16$ Secunden.

12.

Gegeben ist t = 78, d = 2 und s = 1350; gesucht wird a und n. Nach der Formeltafel Nr. 19 ist

$$a = \tfrac{1}{2}d + \sqrt{[(t + \tfrac{1}{2}d)^2 - 2ds]}$$

also $a = \tfrac{1}{2} \cdot 2 + \sqrt{[(78 + \tfrac{1}{2} \cdot 2)^2 - 2 \cdot 2 \cdot 1350]}$

$= 1 + \sqrt{841} = 30$ rthlr. für das erste Jahr

und $n = 1 + \frac{t - a}{d} = 1 + \frac{78 - 30}{2} = 25$ Jahre.

13.

Gegeben ist a = 20, t = 80 und s = 800; gesucht wird n und d. Nach der Formeltafel Nr. 15 ist

$$n = \frac{2s}{a + t} = \frac{2 \cdot 800}{20 + 80} = 16 \text{ Termine.}$$

und $d = \frac{t - a}{n - 1} = \frac{80 - 20}{16 - 1} = 4$ rthlr., welche jeden Termin mehr bezahlt werden müssen.

14.

Gegeben ist n = 15, d = 20 und s = 4200; gesucht wird t. Nach der Formeltafel Nr. 4 ist

$$t = \frac{s}{n} + \frac{(n - 1)\,d}{2} = \frac{4200}{15} + \frac{(15 - 1)\,20}{2}$$

= 420 Kugeln in der untersten Reihe.

15.

Man findet das arithmetische Mittel einer Reihe Zahlen, die um gleich viel wachsen, wenn man die

Summe dieser Zahlen durch die Anzahl der Glieder dividirt. Man findet also hier das arithmetische Mittel der 12 verschiedenen Thermometerstände $= \frac{s}{12}$.

Da nun, nach der Aufgabe, $\frac{s}{12} = 18\frac{3}{4}$, so ist $s = 225$.

Es ist demnach gegeben $n = 12$, $d = \frac{1}{2}$ und $s = 225$; gesucht wird a. Nach der Formeltafel No. 18 ist

$$a = \frac{s}{n} - \frac{(n-1)\,d}{2} = \frac{225}{12} - \frac{(12-1)\,\frac{1}{2}}{2}$$

$= 16$ Grade Thermometerstand am 8ten.

16.

Das zweite Glied einer arithmetischen Progression ist $= a + d$ und das siebente $= a + 6d$. Es ist also nach der Aufgabe

$$\text{I.}\quad a + d + a + 6d = 2a + 7d = 92$$

Ferner ist das vierte Glied $= a + 3d$ und das eilfte $= a + 10d$. Es ist demnach

$$\text{II.}\quad 2a + 13d = 71$$

Subtrahirt man (I.) von (II.), so erhält man

$$6d = -21, \text{ folgl. } d = -\tfrac{7}{2}\,{}^{*)}$$

Substituirt man diesen Werth von d in (I.) oder (II.), so findet man

$$a = 58\tfrac{1}{4}$$

und hieraus das zweite Glied $= a + d = 58\frac{1}{4} + (-\frac{7}{2}) = 58\frac{1}{4} - \frac{7}{2} = 54\frac{3}{4}$ rthlr. für den zweiten,

---

*) Man erhält hier eine negative Differenz, weil sie zu einer fallenden Progression gehört.

und also ist das siebente Glied $= 92 - 54\frac{3}{4} = 37\frac{1}{4}$ rthlr. für den 7ten. Eben so findet man das vierte Glied $= a + 3d = 58\frac{3}{4} - \frac{21}{2} = 47\frac{3}{4}$ rthlr., und hieraus das eilfte Glied $= 71 - 47\frac{3}{4} = 23\frac{1}{4}$ rthlr.

17.

Die beiden mittelsten Glieder sind das neunte und zehnte Glied. Es ist demnach

I. $a + 8d + a + 9d = 2a + 17d = 31\frac{1}{2}$

Ferner ist

II. $a \cdot (a + 17d) = a^2 + 17ad = 85\frac{1}{2}$

Multiplicirt man (I.) mit a und subtrahirt davon (II.), so bleibt

$$a^2 - 31\frac{1}{2}a = -85\frac{1}{2}$$

folgl. $a = \frac{63}{4} + \sqrt{[(\frac{63}{4})^2 - 85\frac{1}{2}]} = 3$ das erste Glied. Substituirt man den Werth von a in (I.), so findet man

$$d = 1\frac{1}{2}$$

18.

Beide Reisende waren eine gleiche Anzahl Tage unter Weges. Diese Anzahl Tage sey $= x$, so bilden die Meilen, welche der Reisende von A aus gemacht, eine arithmetische Progression, wovon $a = 2$, $d = \frac{1}{2}$ und $n = x$. Der Reisende von B aus hat überhaupt 4x Meilen gemacht. Nach der Formeltafel No. 5 ist demnach die Anzahl der Meilen, die der Reisende von A aus überhaupt gemacht hat, oder

$$s = \frac{1}{2}x\,[2 \cdot 2 + (x - 1)\,\frac{1}{2}]$$

Hieraus folgt

$$\frac{1}{2}x\,[2 \cdot 2 + (x-1)\,\tfrac{1}{2}] + 4x = 170$$

$$\text{oder } x^2 + 23x = 680$$

$$\text{folgl. } x = 17 \text{ Tage.}$$

In diesen 17 Tagen hat der Reisende von B aus $4 \cdot 17 = 68$ Meilen gemacht. Die Anzahl der Meilen, die der Reisende von A aus zurückgelegt hat, oder der Ort, wo sie beide zusammentreffen, ist daher

$$= 170 - 68 = 102 \text{ Meilen von A.}$$

19.

Da alle Jahr 500 rthlr. angelegt werden, und sich daher auch die Zinsen jährlich um 25 rthlr. vermehren, Zinseszinsen jedoch nicht angerechnet werden sollen, so bilden die jährlich gelegten Summen unter sich eine arithmetische Progression, wovon $a = 500$ rthlr., $d = 25$ und $s = 6875$ rthlr.; man suche n. Nach der Formeltafel Nr. 14 ist

$$n = \frac{25 - 1000}{50} \pm \sqrt{\left[\frac{2 \cdot 6875}{25} + \left(\frac{1000 - 25}{50}\right)^2\right]}$$

$$= 11$$

Da nun bei Bestimmung der Jahre, nach welchem das Vermögen auf 6875 rthlr. angewachsen ist, das erste Glied nicht mitgezählt werden kann, so ist die gesuchte Zeit

$$= 11 - 1 = 10 \text{ Jahre.}$$

20.

Von dieser Aufgabe, so wie auch von den folgen-

den Aufgaben bis incl. Nr. 27 sind die Auflösungen in den Lehrsätzrn über die figurirten Zahlen selbst unmittelbar enthalten. Das Wichtigste hierüber ist in der Beispielsammlung S. 105 auseinander gesetzt. Die Auflösungen sind daher hier zur Ersparung des Raumes weggeblieben.

28.

Hier ist das erste Glied $a = \frac{1}{2}$ gr., der Exponent $e = 3$ und die Anzahl der Glieder $n = 12$ einer geometrischen Progression gegeben. In der Formeltafel der geometrischen Progressionen (siehe M. Hirsch Beispielsammlung S. 110) findet man die Formeln

$$t = ae^{n-1}$$

$$s = \frac{et - a}{e - 1} = \frac{a\,(e^n - 1)}{e - 1}$$

angegeben. Man braucht daher nur jene Zahlen in diesen Formeln zu substituiren. Es ist demnach

$$t = \tfrac{1}{2} \cdot 3^{12-1} = \frac{3^{11}}{2}\text{ gr.} = 3690\text{ rthlr. } 13\text{ gr. } 6\text{ pf.}$$

$$\text{und } s = \frac{3 \cdot (3690\text{ rthlr. } 13\text{ gr. } 6\text{ pf.}) - \frac{1}{2}\text{ gr.}}{3 - 1}$$

$$= 5535\text{ rthlr. } 20\text{ gr.}$$

29.

Gegeben ist das erste Glied $a = 1$, der Exponent $e = 2$ und die Anzahl der Glieder $n = 64$; gesucht wird s. Es ist demnach

$$s = \frac{1 \cdot (2^{64} - 1)}{2 - 1} = 2^{64} - 1$$
$$= 18{,}446744{,}073709{,}551615 \text{ *)}$$

30.

Bei jeder Erndte habe sich die Aussaat um xmal vermehrt. Es war also die Erndte im ersten Jahre $= x$, im zweiten Jahr $= x^2$, im dritten Jahr $= x^3$ und endlich im zehnten Jahr $= x^{10}$. Es ist demnach

$$x^{10} = 1048576$$
$$\text{folgl. } x = \sqrt[10]{1048576}$$

Diese Wurzel läßt sich am leichtesten durch Logarithmen finden. Es ist nämlich $\log. \sqrt[10]{1048576}$

$$= \frac{\log. 1048576}{10} = \frac{6{,}0206000}{10} = 0{,}6020600$$

Zu diesem Logarithmen gehört die Zahl 4. Es ist also

$$x = 4.$$

31.

x sey die Zahl, mit welcher die Volksmenge eines jeden Jahres multiplicirt werden muß, um die durch den jährlichen Zuwachs vermehrte Volksmenge des

---

*) Um diese Potenz am leichtesten zu erhalten, braucht man nur den Exponenten 64 in seine einfachen Factoren $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$ zu zerfällen. Man erhält also nach und nach $2^2 = 4$, $4^2 = 16$, $16^2 = 256$, $256^2 = 65536$, $65536^2 = 4294967296$, $4294967296^2 = 18446744073709551616$. Hiervon 1 abgezogen, giebt die verlangte Zahl.

nächstfolgenden Jahres zu erhalten, so ist die Volksmenge am Ende des ersten Jahres $10000x$, am Ende des zweiten $10000x^2$, am Ende des dritten $10000x^3$ und am Ende des vierten $10000x^4$. Es ist demnach

$$10000x^4 = 14641$$

$$\text{folgl. } x = \sqrt[4]{1{,}4641} = \sqrt{\sqrt{1{,}4641}} = \tfrac{11}{10}$$

Da also die Volksmenge eines jeden Jahres um so viel anwächst, daß sie $\frac{11}{10}$ des nächstvorhergehenden Jahres beträgt, so vermehrt sie sich jährlich um $\frac{1}{10}$.

32.

Da hier das erste Glied 1 ist, so ist das zweite Glied der Exponent selbst. Es ist also $a = 1$, $t = 3$ und $n = 12$ gegeben, und e wird gesucht. Nun ist nach der Formeltafel der geometrischen Progressionen Nr. 13

$$e = \sqrt[n-1]{\frac{t}{a}} = \sqrt[11]{3}$$

Hieraus findet man mit Hülfe der Logarithmen das zweite Glied oder $e = 1{,}105 \ldots$

33.

Gegeben ist $a = 5$, $t = 80$ und $n = 32$. Es ist daher nach der Formeltafel Nr. 13

$$e = \sqrt[n-1]{\frac{t}{a}} = \sqrt[31]{16}$$

$$\text{also } \log. e = \frac{\log. 16}{31} = \frac{1{,}2041200}{31} = 0{,}0388429$$

Zu diesem Logarithmen gehört die Zahl 1,0935 = e.
Ferner ist nach der Formeltafel Nr. 6

$$s = \frac{et - a}{e - 1} = \frac{1,0935 \cdot 80 - 5}{1,0935 - 1} = \frac{82,484}{0,0935}$$
$$= 882,19 \ldots\ldots$$

Endlich ist nach der Formeltafel Nr. 1

$$t = ae^{n-1} = 5 \cdot 1,0935^{19}$$
oder $\log. t = \log. 5 + 19 \cdot \log. 1,0935$
$$= 1,4365272$$

Zu diesem Logarithmen gehört die Zahl 27,351 ...

34.

Es sey das erste Glied der zu suchenden Progression = x und der Exponent = y, so hat man die beiden Gleichungen

$$\text{I.}\quad x + xy + xy^2 + xy^3 + xy^4 + xy^5 = 157\tfrac{1}{2}$$
$$\text{II.}\quad xy + xy^2 + xy^3 + xy^4 + xy^5 + xy^6 = 315$$

Multiplicirt man (I.) mit y und ziehet diese Gleichung von (II.) ab, so bleibt

$$315 - 157\tfrac{1}{2}y = 0$$
folgl. $y = 2 =$ dem Exponenten e.

Da nun die Summe der ersten 6 Glieder bekannt ist, so ist gegeben

$$n = 6,\ e = 2 \text{ und } s = 157\tfrac{1}{2}$$

Hieraus findet man nach der Formeltafel Nr. 10

$$a = \frac{(e-1)\,s}{e^n - 1} = \frac{(2-1)\ 157\frac{1}{2}}{2^6 - 1} = \frac{157\frac{1}{2}}{63}$$
$$= \frac{315}{126} = 2\tfrac{1}{2}$$

folgl. ist die gesuchte Progression

$2\frac{1}{2}$, 5, 10, 20, 40, 80, 160.

35.

Für die Auflösung dieser Aufgabe sowohl als der folgenden bis zu Ende dieses Abschnittes gilt dieselbe Bemerkung von der 35. Aufgabe des X. Abschnittes Seite 367.

XII.

Auflösungen der Aufgaben aus der Zins- und Rentenrechnung nebst einigen andern dahin gehörigen.

(Zu M. Hirsch Sammlung von Beispielen ꝛc. XXI. Kapitel, von S. 284 bis 293.)

1.

Da der Zinsfuß = p ist, also aus einem Thaler Kapital nach Verlauf eines Jahres durch die hinzukommenden Interessen p rthlr. werden, so wird aus a rthlr. am Ende des ersten Jahres ap rthlr. Ferner wird aus ap rthlr. am Ende des zweiten Jahres ap^2 rthlr.; aus ap^2 rthlr. wird am Ende des dritten Jahres ap^3 rthlr. u. s. w. Hieraus ergiebt sich also, daß aus a rthlr. nach n Jahren ap^n rthlr. wird.

2.

Hier ist $a = 5000$, $n = 40$ und $p = \frac{26}{25}$ *). Folglich wird aus dem Kapitale x nach 40 Jahren

*) Weil nämlich bei 4 Procent Interessen aus 100 rthlr. nach einem Jahre 104 rthlr. werden, so wird aus einem Thaler $\frac{104}{100} = \frac{26}{25}$ rthlr.

$5000 \cdot \left(\frac{26}{25}\right)^{40}$; durch Logarithmen findet man

$x = 24405,1 \ldots$ rthlr.

3.

Hier ist $a = 3200$, $n = 80$ und $p = \frac{103}{100}$. Folglich wird das Kapital x nach 80 Jahren

$3200 \cdot \left(\frac{103}{100}\right)^{80}$; durch Logarithmen findet man

$x = 34050,8 \ldots$ rthlr.

4.

Hier ist $a = 32500$, $n = 24$ und $p = \frac{103}{100}$. Folglich wird der Inhalt x des Reviers nach 24 Jahren

$32500 \cdot \left(\frac{103}{100}\right)^{24}$; durch Logarithmen findet man

$x = 66065,8 \ldots$ Klafter.

5.

Hier ist $a = 200000$, $n = 100$ und $p = \frac{51}{50}$. Folglich ist die Volksmenge x nach 100 Jahren

$200000 \cdot \left(\frac{51}{50}\right)^{100}$; durch Logarithmen findet man

$x = 1448927$ beinahe.

6.

Wenn aus 100 rthlr. Kapital nach einem Jahre 106 rthlr. wird, so wird es nach einem halben Jahre 103 rthlr. Es ist demnach $p = \frac{103}{100}$, und da in zehn Jahren 20 halbe Jahre vorkommen, so ist $n = 20$. Folglich ist das Kapital x nach 10 Jahren

$12000 \cdot \left(\frac{103}{100}\right)^{20}$; durch Logarithmen findet man

$$x = 21673 \text{ rthlr. } 8 \text{ gr. ungefähr.}$$

7.

Die Anzahl der gesuchten Jahre mag x seyn, so werden die 3600 rthlr. Kapital nach x Jahren

$3600 \cdot \left(\frac{21}{20}\right)^{x}$ oder log. 3600 + x (log. 21 − log. 20)

$$= 3{,}5563025 + 0{,}0211893x$$

Nun betragen 5000 rthlr. zu 4 Procent in 12 Jahren

$5000 \cdot \left(\frac{26}{25}\right)^{12}$. Der Logarithmus dieses Ausdrucks ist 3,9033696. Es ist daher nach der Aufgabe

$$3{,}5563025 + 0{,}0211893x = 3{,}9033696$$

Multiplicirt man beide Theile dieser Gleichung mit 10000000, so ist

$$35563025 + 211893x = 39033696$$

folgl. x = 16 Jahre beinahe.

8.

Die Anzahl der gesuchten Jahre mag ebenfalls = x seyn, so wird das Kapital a nach x Jahren

$$= ap^{x} = \log. a + x \log. p$$

Ferner beträgt das Kapital a′ zum Zinsfuß p′ in n Jahren $a'p'^{n}$ oder log. a′ + n log. p′. Es ist daher

$$\log. a + x \log. p = \log. a' + n \log. p'$$

$$\text{folgl. } x = \frac{\log. a' + n \log. p' - \log. a}{\log. p}$$

9.

Das Kapital sey x rthlr., so ist es in 15 Jahren auf $x \cdot \left(\frac{26}{25}\right)^{15}$ angewachsen; ferner betragen 4500 rthlr. zu 6 Procent nach 9 Jahren $4500 \cdot \left(\frac{53}{50}\right)^{9}$. Es ist demnach

$$x \cdot \left(\frac{26}{25}\right)^{15} = 4500 \cdot \left(\frac{53}{50}\right)^{9}$$

Setzt man für diese Ausdrücke ihre Logarithmen, so erhält man

$$\log. x + 15\,(\log. 26 - \log. 25) = \log. 4500$$
$$+ 9\,(\log. 53 - \log. 50)$$

oder $\log. x + 0{,}2554995 = 3{,}8809656$

folgl. $\log. x = 3{,}6254661$

mithin x = 4221 rthlr. ungefähr.

10.

Das Kapital sey wiederum = x, so ist es zu dem Zinsfuß p nach n Jahren auf xp^n angewachsen. Ferner beträgt das Kapital a' zum Zinsfuß p' nach n' Jahren $a'p'^{n'}$. Es ist demnach

$$xp^n = a'p'^{n'}$$

oder $\log. x + n \log. p = \log. a' + n' \log. p'$

folgl. $\log. x = \log. a' + n' \log. p' - n \log. p$

Aus dem Logarithmus von x läßt sich mittelst der Tabelle das Kapital x selbst finden.

11.

Der gesuchte Zinsfuß sey = x. Es beträgt da-

her das Kapital a zum Zinsfuß x nach n Jahren ax^n und das Kapital a' zum Zinsfuß p' nach n' Jahren $a'p'^{n'}$. Es ist also

$$ax^n = a'p'^{n'}$$

$$\text{oder } \log. a + n \log. x = \log. a' + n' \log. p'$$

$$\text{folgl. } \log. x = \frac{\log. a' + n' \log. p' - \log. a}{n}$$

12.

Zuerst berechne man, was aus 7963 rthlr. zu 5 Procent auf Zinseszinsen nach 5 Jahren wird; man erhält

$7963 \cdot \left(\frac{21}{20}\right)^5$; durch Logarithmen findet man

10163 rthlr. beinahe.

Hiervon subtrahire man 576, und untersuche, was aus den übrig bleibenden 9587 rthlr. nach 3 Jahren wird. Man findet

$9587 \cdot \left(\frac{21}{20}\right)^3$; durch Logarithmen erhält man

11098 rthlr. beinahe.

Hiervon subtrahire man 498 rthlr., und untersuche endlich, was aus den übrig bleibenden 10600 rthlr. nach 2 Jahren wird, so findet man

$10600 \cdot \left(\frac{21}{20}\right)^2$; durch Logarithmen erhält man

11686 rthlr. ungefähr.

13.

Man setze, aus einem Thaler Kapital wird nach Verlauf eines halben Jahres x rthlr., folglich wird

aus 100 rthlr. 100x rthlr. und also am Ende eines ganzen Jahres $100x^2$ rthlr. Nun sind nach der Aufgabe die jährlichen Zinsen zu 5 Procent gerechnet, d. h. aus 100 rthlr. Kapital wird nach einem Jahre 105 rthlr. Es ist demnach

$$100x^2 = 105$$

$$\text{folgl. } x = 1{,}0247\ldots$$

Da nun aus Einem Thaler 1,0247 ... rthlr. wird, so wird aus 100 rhlr. 102,47 rthlr. Die halbjährlichen Procente betragen daher 2,47 rthlr. beinahe.

Auf eine ähnliche Art findet man die vierteljährlichen Zinsen, wenn man setzt

$$100x^4 = 105$$

$$\text{also } x = \sqrt[4]{1{,}05}$$

$$= 1{,}0123$$

Mithin wird aus 100 rthlr. nach einem Vierteljahre 101,23. Die vierteljährlichen Procente sind also 1,23.

14.

Die gesuchten Interessen seyen = x rthlr., d. h. man setze, aus einem Thaler Kapital werde nach Verlauf von $\frac{1}{n}$ Jahr 1 + x Thaler, und also in einem ganzen Jahre $(1 + x)^n$. Da nun der Zinsfuß = p, d. h. nach Verlauf eines Jahres wird aus einem Thaler Kapital durch die hinzukommenden Interessen p Thaler, so ist

$$(1 + x)^n = p$$

$$\text{also } x = \sqrt[n]{p} - 1 \text{ für 1 rthlr. Kapital}$$

$$\text{und } 100\,(\sqrt[n]{p} - 1) \text{ für 100 rthlr. Kapital.}$$

15.

Das Kapital sey $= 1$, so wird daraus nach x Jahren zu 4 Procent auf Zinseszinsen $1 \cdot \left(\frac{26}{25}\right)^x$. Es ist demnach der Aufgabe gemäß

$$\left(\frac{26}{25}\right)^x = 2$$

Hiernach findet man vermittelst Logarithmen

$$x = \frac{0{,}3010300}{0{,}0170333} = \frac{3010300}{170333} = 17 \text{ Jahre ungefähr.}$$

Nach dem zweiten Theil der Aufgabe findet man

$$\left(\frac{26}{25}\right)^x = 3$$

$$\text{folgl. } x = \frac{0{,}4771213}{0{,}0170333} = \frac{4771213}{170333} = 29 \text{ Jahre beinahe.}$$

16.

Das Kapital sey wiederum 1, so wird daraus nach x Jahren, zum Zinsfuß p, p^x. Es ist demnach $p^x = m$,

$$\text{folgl. } x = \frac{\log. m}{\log. p}$$

17.

Die Anzahl der Procente sey so groß, daß aus einem Thaler Kapital jährlich x rthlr. wird, mithin

wird aus 600 rthlr. nach drei Jahren $600x^3$. Es ist demnach

$$600x^3 = 800$$

$$\text{folgl. } x = 1{,}1006\ldots$$

Da nun aus einem Thaler nach einem Jahre 1,1006... rthlr. wird, so wird aus 100 rthlr. 110,06. Mithin betragen die Procente etwas mehr als 10.

18.

Das Kapital a wächst bei dem Zinsfuß von p in n Jahren auf ap^n an. Es ist demnach

$$ap^n = A$$

$$\text{folgl. } \log. p = \frac{\log. A - \log. a}{n}$$

19.

Die Summe, welche jetzt baar bezahlt wird, sey $= x$. Dieses Kapital beträgt zu 4 Procent auf Zinseszinsen nach 6 Jahren $x \cdot \left(\frac{26}{25}\right)^6$. Es ist daher nach der Aufgabe

$$x \cdot \left(\frac{26}{25}\right)^6 = 3750$$

oder durch Logarithmen ausgedrückt

$$\log. x + 6\,(\log. 26 - \log. 25) = \log. 3750$$

$$\text{also } \log. x = 3{,}5740313 - 0{,}1021998 = 3{,}4718315$$

$$\text{folgl. } x = 2963{,}6 = 2963 \text{ rthlr. } 15 \text{ gr. ungefähr.}$$

20.

Die Summe, welche jetzt baar bezahlt wird, sey wieder $= x$. Dieses Kapital beträgt in n Jahren

zum Zinsfuß p, xp^n. Eben so ist das Kapital a zu demselben Zinsfuß nach n Jahren $= ap^n$. Es ist demnach $xp^n = a$,

$$\text{folgl. } x = \frac{a}{p^n}$$

21.

Verfährt man hier wie in der vorigen Aufgabe, so ist

$$x \cdot \left(\frac{26}{25}\right)^{20} = 500$$

oder durch Logarithmen ausgedrückt

$$\log. x + 20 (\log. 26 - \log. 25) = \log. 500$$

$$\text{also } \log. x = 2{,}6989700 - 0{,}3406661 = 2{,}3583040$$

folgl. $x = 228$ rthlr. ungefähr.

22.

Die Volksmenge vor 10 Jahren sey $= x$. Da man sich nun die jährliche Vermehrung einer Volksmenge wie jährliche Vermehrung eines Kapitals durch Zinseszinsen vorstellen kann, so beträgt die Volksmenge am Ende des zehnten Jahres $x \cdot \left(\frac{103}{100}\right)^{10}$. Es ist demnach

$$x \cdot \left(\frac{103}{100}\right)^{10} = 20000$$

oder durch Logarithmen ausgedrückt

$$\log. x + 10 (\log. 103 - \log. 100) = \log. 20000$$

$$\text{also } \log. x = 4{,}1726580$$

folgl. $x = 14882$ Menschen.

23.

Hier findet man auf eine ähnliche Art wie vorher die Gleichung

$$x \cdot \left(\frac{51}{50}\right)^{10} = 30000$$

oder durch Logarithmen ausgedrückt

$$\log. x + 10 (\log. 51 - \log. 50) = \log. 30000$$

also $\log. x = 4{,}3911193$

folgl. $x = 24610$

24.

Die 30000 rthlr., welche der erste baar bezahlen will, betragen zu 5 Procent Zinseszinsen nach drei Jahren

$$30000 \cdot \left(\frac{21}{20}\right)^{3} = 34728$$

und nach sieben Jahren

$$30000 \cdot \left(\frac{21}{20}\right)^{7} = 42213 \text{ rthlr.}$$

Hieraus ergiebt sich also, daß das Gebot des ersten größer ist als das der beiden andern. Nun findet man ferner das Gebot x des zweiten an baarem Werthe, wenn man setzt

$$x \cdot \left(\frac{21}{20}\right)^{3} = 33500$$

oder $\log. x + 0{,}0635679 = 4{,}5250448$

also $\log. x = 4{,}4614769$

folgl. $x = 28938$ rthlr.

Hieraus ergiebt sich, daß das Gebot des ersten um

1062 rthlr. mehr beträgt, als das Gebot des zweiten an baarem Gelde ausmacht. Setzt man endlich

$$x \cdot \left(\frac{21}{20}\right)^7 = 40000$$

so findet man auf eine ähnliche Art wie vorher

$$x = 28427 \text{ rthlr.}$$

und also beträgt der Ueberschuß des Gebots des ersten gegen den des dritten, an baarem Werthe gerechnet, 1573 rthlr.

25.

Wenn die Volksmenge $= 1$ angenommen wird, so wird sie nach x Jahren $= 1 \cdot \left(\frac{103}{100}\right)^x$. Es ist demnach

$$\left(\frac{103}{100}\right)^x = 10$$

oder logarithmisch $0{,}0128372x = 1$

folgl. $x = \frac{1}{0{,}0128372} = \frac{10000000}{128372} = 78$ Jahre ungefähr.

26.

Das Kapital mag so benutzt worden seyn, daß aus einem Thaler nach einem Jahre x rthlr., folglich aus 800 rthlr. nach einem Jahre $800x$ und also nach 6 Jahren $800x^6$ geworden ist. Es ist demnach

$$800x^6 = 3600$$

also $x^6 = \frac{9}{2}$ oder $6 \cdot \log. x = \log. 9 - \log. 2$

folgl. $\log. x = 0{,}1088687$

und mithin $x = 1{,}2848$

Da nun aus einem Thaler nach einem Jahre 1,2848 geworden ist, so muß aus 100 rthlr. 128,48 rthlr. geworden seyn. Die gesuchten Procente betragen also $28\frac{1}{2}$ beinahe.

27.

Man findet die Größe des Kapitals nach n Jahren, wenn man folgendergestalt schließt. Das Kapital wird

nach 1 Jahre $ap \pm b$

nach 2 Jahren $ap^2 \pm bp \pm b$

nach 3 Jahren $ap^3 \pm bp^2 \pm b$

. .
. .
. .
. .
. .

nach n Jahren $ap^n \pm bp^{n-1} \pm bp^{n-2} \ldots \pm bp \pm b$

Hieraus ergiebt sich, daß das gesuchte Kapital aus zwei Theilen bestehet, nämlich aus ap^n und aus der Summe einer geometrischen Progression, wovon das erste Glied b, der Exponent p und die Anzahl der Glieder n ist. Die Summe dieser geometrischen Progression ist $= \frac{b(p^n-1)}{p-1}$. Es ist demnach das Kapital nach n Jahren

$$ap^n \pm \frac{b\,(p^n-1)}{p-1}$$

28.

Hier ist $a = 6000$, $b = 500$, $n = 10$ und $p = \frac{21}{20}$. Es ist daher das gesuchte Kapital

$$x = 6000 \cdot \left(\frac{21}{20}\right)^{10} + \frac{500\left[\left(\frac{21}{20}\right)^{10} - 1\right]}{\frac{21}{20} - 1}$$

Dividirt man den Zähler $500 \left[\left(\frac{21}{20}\right)^{10} - 1\right]$ durch den Nenner $\frac{21}{20} - 1 = \frac{1}{20}$, so erhält man

$$x = 6000 \cdot \left(\frac{21}{20}\right)^{10} + 10000 \left(\frac{21}{20}\right)^{10} - 10000$$

$$= 16000 \left(\frac{21}{20}\right)^{10} - 10000$$

Nun findet man vermittelst Logarithmen $16000 \left(\frac{21}{20}\right)^{10} - 10000 = 26062$, folglich ist

$$x = 26062 - 10000 = 16062 \text{ rthlr. ungefähr.}$$

29.

Hier ist $a = 3740$, $n = 8$, $b = 450$ und $p = \frac{26}{25}$. Man findet wie vorher

$$x = 3740 \cdot \left(\frac{26}{25}\right)^{8} + \frac{450\left[\left(\frac{26}{25}\right)^{8} - 1\right]}{\frac{26}{25} - 1}$$

$$= 14990 \left(\frac{26}{25}\right)^{8} - 11250 = 20514 - 11250$$

$$= 9264 \text{ rthlr. ungefähr.}$$

30.

Hier ist $a = 15467$, $n = 10$, $b = 600$ und $p = \frac{21}{20}$. Es ist daher

$$x = 15467 \cdot \left(\frac{21}{20}\right)^{10} - \frac{600\left[\left(\frac{21}{20}\right)^{10} - 1\right]}{\frac{21}{20} - 1}$$

$$= 3467 \left(\frac{21}{20}\right)^{10} + 12000 = 5647 + 12000$$

$= 17647$ rthlr. ungefähr.

31.

Hier ist $a = 5000$, $n = 10$, $b = 400$ und $p = \frac{21}{20}$. Es ist demnach

$$x = 5000 \cdot \left(\frac{21}{20}\right)^{10} - \frac{400\left[\left(\frac{21}{20}\right)^{10} - 1\right]}{\frac{21}{20} - 1}$$

$$= 8000 - 3000 \cdot \left(\frac{21}{20}\right)^{10} = 8000 - 4886{,}6$$

$= 3113$ rthlr. ungefähr.

32.

Da der Kaufmann jetzt baar 4000 rthlr. und außerdem beim Anfange jedes der folgenden 5 Jahre noch 4000 rthlr. zu bezahlen hat, so ist $a = 4000$, $b = 4000$, $n = 6$ und $p = \frac{26}{25}$. Es ist also

$$x = 4000 \cdot \left(\frac{26}{25}\right)^{6} + \frac{4000\left[\left(\frac{26}{25}\right)^{6} - 1\right]}{\frac{26}{25} - 1}$$

$$= 104000 \left(\frac{26}{25}\right)^{6} - 100000 = 131593 - 100000$$

$= 31593$ rthlr. ungefähr.

33.

Hier ist $a = 30000$, $b = 800$, $n = 15$ und $p = \frac{26}{25}$. Es ist demnach

$$x = 30000 \cdot \left(\frac{26}{25}\right)^{15} - \frac{800\left[\left(\frac{26}{25}\right)^{15} - 1\right]}{\frac{26}{25} - 1}$$

$$= 20000 + 10000\left(\frac{26}{25}\right)^{15} = 20000 + 18009$$

$$= 38009 \text{ rthlr. ungefähr.}$$

34.

Hier ist $a = 100000$, $b = 6000$ und $p = \frac{21}{20}$. Setzt man daher die gesuchte Anzahl Jahre $= x$, so ist

$$100000 \cdot \left(\frac{21}{20}\right)^{x} - \frac{6000\left[\left(\frac{21}{20}\right)^{x} - 1\right]}{\frac{21}{20} - 1} = 0$$

$$\text{oder } 120000 - 20000\left(\frac{21}{20}\right)^{x} = 0$$

Hieraus findet man durch Logarithmen

$0{,}0211893x = 5{,}0791812 - 4{,}3010300 = 0{,}7781512$

folgl. $x = \frac{0{,}7781512}{0{,}0211893} = \frac{7781512}{211893} = 36$ bis 37 Jahre.

35.

In x Jahren. Nun ist

$$ap^{x} \pm \frac{b\,(p^{x} - 1)}{p - 1} = a'$$

oder $ap^x (p-1) \pm bp^x \mp b = a' (p-1)$

$$p^x [(p-1)a \pm b] = (p-1) a' \pm b$$

$$x \log. p + \log. [(p-1) a \pm b] = \log. [(p-1) a' \pm b]$$

folgl. $$x = \frac{\log. [(p-1) a' \pm b] - \log. [(p-1) a \pm b]}{\log. p}$$

36.

In diesem Falle ist $a' = 0$, und also auch $(p-1) a' = 0$.

Es ist demnach $$x = \frac{\log. b - \log. [b - (p-1) a]}{\log. p}$$

37.

Die gesuchte Summe w muß so groß seyn, daß wenn man sie auf Zinseszinsen zum Zinsfuß p auf eine Rente giebt, und jährlich die Rente v davon wegnimmt, nach Verlauf von n Jahren alles aufgezehrt sey. Es ist also

$$wp^n - \frac{r (p^n - 1)}{p - 1} = 0$$

folgl. $$w = \frac{(p^n - 1) r}{(p-1) p^n}$$

38.

Die Summe, welche man ihm an baarem Gelde zu geben hat, muß so groß seyn, daß wenn man sie auf Zinseszinsen zu $3\frac{1}{2}$ Procent verleihet, und jährlich 500 rthlr. davon nimmt, nach Verlauf von 6 Jahren alles verzehrt sey. Da nun $b = 500$, $n = 6$ und $p = \frac{103\frac{1}{2}}{100} = \frac{207}{200}$, so ist

$$x \cdot \left(\frac{207}{200}\right)^6 - \frac{500 \cdot \left[\left(\frac{207}{200}\right)^6 - 1\right]}{\frac{207}{200} - 1} = 0$$

oder $x \cdot \left(\frac{207}{200}\right)^6 = \frac{100000}{7} \cdot \left[\left(\frac{207}{200}\right)^6 - 1\right]$

Erhebt man vermittelst Logarithmen die beiden Brüche $\frac{207}{200}$ zur sechsten Potenz, und verwandelt $\frac{100000}{7}$ in einen Decimalbruch, so ist

$$1{,}2292x = 14285{,}7 \cdot 1{,}2292 - 14285{,}7$$

folgl. $x = 2664$ rthlr. ungefähr.

39.

Hier ist $b = 350$, $n = 8$ und $p = \frac{26}{25}$. Es ist demnach

$$x \cdot \left(\frac{26}{25}\right)^8 - \frac{350\left[\left(\frac{26}{25}\right)^8 - 1\right]}{\frac{26}{25} - 1} = 0$$

oder $1{,}3685x = 8750 \cdot 1{,}3685 - 8750$

folgl. $x = 2356$ rthlr. ungefähr.

40.

Hier ist $b = 400$, $n = 12$ und $p = \frac{103}{100}$. Es ist daher

$$x \cdot \left(\frac{103}{100}\right)^{12} - \frac{400\left[\left(\frac{103}{100}\right)^{12} - 1\right]}{\frac{103}{100} - 1} = 0$$

oder $1,4257x = 13333,3 \cdot 1,4257 - 13333,3$
folgl. $x = 3981$ rthlr. ungefähr.

41.

Es ist nach der 37. Auflösung

$$wp^n (p-1) = r(p^n - 1)$$

$$\text{folgl. } r = \frac{wp^n (p-1)}{p^n - 1}$$

42.

Hier ist $a = 1200$, $n = 7$ und $p = \frac{26}{25}$. Es ist demnach

$$1200 \cdot \left(\frac{26}{25}\right)^7 - \frac{x \cdot \left[\left(\frac{26}{25}\right)^7 - 1\right]}{\frac{26}{25} - 1} = 0$$

oder $1200 \cdot 1,3159 = 25x \cdot 1,3159 - 25x$
also $x \cdot (25 \cdot 1,3159 - 25) = 1200 \cdot 1,3159$
folgl. $x = 200$ rthlr. beinahe.

43.

Hier ist $a = 20000$, $n = 13$ und $p = \frac{26}{25}$. Es ist also

$$20000 \cdot \left(\frac{26}{25}\right)^{13} - \frac{x \cdot \left[\left(\frac{26}{25}\right)^{13} - 1\right]}{\frac{26}{25} - 1} = 0$$

oder $20000 \cdot 1,665 = 25x \cdot 1,665 - 25x$
also $x \cdot (25 \cdot 1,665 - 25) = 20000 \cdot 1,665$
folgl. $x = 2003$ rthlr. ungefähr.

44.

Hier ist $a = 20000$, $b = 1500$ und $p = \frac{21}{20}$. Es ist demnach

$$20000 \cdot \left(\frac{21}{20}\right)^x - \frac{1500 \cdot \left[\left(\frac{21}{20}\right)^x - 1\right]}{\frac{21}{20} - 1} = 0$$

$$\text{oder } 10000 \left(\frac{21}{20}\right)^x = 30000$$

oder durch Logarithmen

$$4 + 0{,}0211893x = 4{,}4771213$$

folgl. $x = 22$ Jahr ungefähr.

45.

Hier ist $a = 34580$, $b = 2000$ und $p = \frac{26}{25}$. Es ist daher

$$34580 \cdot \left(\frac{26}{25}\right)^x - \frac{2000 \cdot \left[\left(\frac{26}{25}\right)^x - 1\right]}{\frac{26}{25} - 1} = 0$$

$$\text{oder } 15420 . \left(\frac{26}{25}\right)^x = 50000$$

oder durch Logarithmen ausgedrückt

$$4{,}1880844 + 0{,}0170333x = 4{,}6989700$$

folgl. $x = 30$ Jahr ungefähr.

46.

Die Auflösungen von dieser Aufgabe und den folgenden bis zu Ende dieses Abschnittes findet man durch die in der 27. Auflösung dargestellte Formel, weshalb sie hier weggeblieben sind.

XIII.

Auflösungen der Aufgaben für die Permutationen, Combinationen und Variationen, desgleichen für Wahrscheinlichkeitsrechnungen.

(Zu M. Hirsch Sammlung von Beispielen 2c. XXII. Kapitel, S. 294 bis S. 305.)

1.

Um die Anzahl dieser Verwechselungen zu erhalten, muß man, wie man aus der Lehre von den Permutationen weiß, folgende Factoren mit einander multipliciren

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8$$

welche zum Producte 40320 für die Anzahl der Verwechselungen geben.

2.

Auch hier muß man das Product

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11 \cdot 12 \cdot 13 \cdot 14 \cdot 15 \cdot 16 \cdot 17 \cdot 18 \cdot 19 \cdot 20 \cdot 21 \cdot 22 \cdot 23 \cdot 24$$

machen, woraus man 620448401733239439360000 erhält.

3.

Da hier der Buchstabe a, oder b, oder c bei jeder Versetzung in der ersten Stelle bleiben und also nicht mit versetzt werden soll, so braucht man nur die Anzahl der Versetzungen der übrigen sechs Buchstaben zu suchen. Da sich nun sechs Buchstaben $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 720$mal versetzen lassen, so giebt es auch 720 Versetzungen, die sich mit a, oder b, oder c anfangen.

4.

Hier sollen die Buchstaben ab bei jeder Versetzung immer in der ersten Stelle bleiben, und sollen also nicht mit versetzt werden. Da sich nun die übrigen fünf Buchstaben $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$mal versetzen lassen, so giebt es auch 120 Versetzungen, die sich mit ab anfangen. Eben so findet man 24 Versetzungen, welche sich mit abc anfangen, weil sich die vier übrigen Buchstaben $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$mal versetzen lassen. Endlich giebt es sechs Versetzungen, die sich mit abcd anfangen, weil sich die übrigen drei Buchstaben $1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$mal versetzen lassen.

5.

Die vier Buchstaben a, b, c, d sollen, nach der Aufgabe, in dieser Ordnung, ohne irgend eine Versetzung zu erleiden, zusammen bleiben; man kann daher a, b, c, d nur als einzelnes Glied ansehen, und man hat also nur die vier Glieder abcd, e, f, g zu

versetzen. Dieses giebt $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$ Versetzungen.

6.

Hier ist alles wie in der vorigen Aufgabe, nur daß das Glied abcd nicht in der einzigen Ordnung, so wie es sich hier befindet, stehen bleiben, sondern alle mögliche Versetzungen erleiden soll. Nun hatte man in der vorigen Aufgabe bereits 24 Versetzungen, worin jedesmal das Glied abcd vorkam; da sich nun dieses Glied selbst auf $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$ Arten versetzen läßt, so hat man $24 \cdot 24 = 576$ Versetzungen.

7.

Die Buchstaben, welche versetzt werden sollen, sind

a, a, a, b, b, b, b, b, c, c, c, c

Da nun jedes Mal c, c, c in der ersten Stelle bleiben und nicht versetzt werden soll, so kömmt es nur auf die Anzahl der Versetzungen von

a, a, a, b, b, b, b, b, c

an, und diese ist $= \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 1} = 504$.

Es giebt also 504 Versetzungen, welche sich mit c^3 anfangen.

8.

Da es hier auf die Anzahl der Versetzungen von

a, b, b, b, c, c, c

ankömmt, so findet man solche

$$= \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7}{1 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3} = 140$$

Es giebt also 140 Versetzungen, die sich mit a^2b^2c anfangen.

9.

Nach der Aufgabe soll ein a in allen Permutationen seine Stelle behalten, das heißt: einer der Buchstaben a soll nicht versetzt werden. Es kömmt also hier nur darauf an, die Anzahl der Permutationen von

a, a, b, b, b, b, b, c, c, c, c

zu bestimmen, und dieses giebt

$$\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11}{1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 6930$$

Es giebt also 6930 Versetzungen, worin a die vierte Stelle einnimmt.

10.

Die Anzahl der Versetzungen von den 5 Ziffern ist $\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}{1 \cdot 2} = 60$. Da nun die Summe der Ziffern in jeder Versetzung $= 1+2+2+3+4 = 12$ ist, so ist die Summe der Ziffern in allen Versetzungen $= 12 \cdot 60 = 720$.

11.

Eine jede der gegebenen 5 Ziffern kömmt so oft in der ersten Stelle, und also auch in der ersten Columne vor, als die Anzahl der Versetzungen der vier übrigen beträgt; eben so oft kömmt aber auch eine jede Ziffer in der zweiten, dritten, vierten und fünften

Stelle oder Columne vor. Die Summen der in den fünf Columnen enthaltenen Ziffern sind daher gleich groß, man braucht also nur mit der Anzahl der Ziffern, das ist mit 5 in die Summe der Ziffern von allen Versetzungen, das ist in 720 zu dividiren, wo man den Quotienten 144 für die Summe jeder Columne erhält.

12.

Die Anzahl der Versetzungen ist

$$\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2} = 1260$$

Multiplicirt man diese Zahl mit der Summe der gegebenen Ziffern $= 2+5+5+7+7+8+9 = 43$, so erhält man die Summe der Ziffern in allen Versetzungen. Dividirt man dieses Product durch die Anzahl der Ziffern $= 7$, so erhält man den Quotienten 7740.

13.

Hier will man finden, wie oft sich 90 Nummern zu zwei, drei, vier und fünf Ziffern combiniren lassen. Die allgemeinen Formeln für die Anzahl der Combinationen ohne Wiederholungen sind:

für die Binionen $\frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}$

„ „ Ternionen $\frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}$

„ „ Quaternionen $\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}$

„ „ Quinionen $\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}$

Also sind hier

Amben $\frac{90\,(90-1)}{1\cdot 2} = 4005$

Ternen $\frac{90\,(90-1)\,(90-2)}{1\cdot 2\cdot 3} = 117480$

Quaternen $\frac{90(90-1)(90-2)(90-3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} = 2555190$

Quinten $\frac{90(90-1)(90-2)(90-3)(90-4)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} = 43949268$

14.

Hier ist n = 60. Folglich sind es

$\frac{60\,(60-1)}{1\cdot 2} = 1770$ Amben

$\frac{60\,(60-1)\,(60-2)}{1\cdot 2\cdot 3} = 34220$ Ternen

$\frac{60\,(60-1)\,(60-2)\,(60-3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} = 487635$ Quaternen

$\frac{60(60-1)(60-2)(60-3)(60-4)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} = 5461512$ Quinten.

15.

Hier will man finden, wie oft sich 32 Karten zu 15 combiniren lassen, es ist also n = 32, und folglich ist die Anzahl der Zusammensetzungen

$$\frac{32\cdot 31\cdot 30\cdot 29\cdot 28\cdot 27\cdot 26\cdot 25\cdot 24\cdot 23\cdot 22\cdot 21\cdot 20\cdot 19\cdot 18}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8\cdot 9\cdot 10\cdot 11\cdot 12\cdot 13\cdot 14\cdot 15} \text{*)}$$
$$= 565722720$$

*) Es versteht sich von selbst, daß man vor der Multiplication der Ziffern im Zähler und Nenner, die in beiden enthaltenen gleichen Factoren gegen einander wegstreichen kann, wodurch die Rechnung um ein Bedeutendes erleichtert wird.

16.

Die Lehrsätze, welche zur Auflösung der Aufgaben von Nr. 16 bis incl. Nr. 24 erforderlich sind, befinden sich im IX. Abschnitte der Beispielsammlung von S. 80 bis S. 94 angeführt und durch viele Beispiele erläutert. Die Auflösungen bieten hiernach keine Schwierigkeiten mehr dar, und sind daher aus diesem Grunde hier weggeblieben.

25.

In allen 90 Nummern sind 4005 Amben und in 5 Nummern 10 Amben enthalten, es kommen also von 4005 Amben nur 10 Amben heraus. Es ist daher die Wahrscheinlichkeit des Gewinnstes für den, der eine Ambe besetzt hat, $= \frac{10}{4005} = \frac{2}{801}$, d. h. unter 801 Fällen sind 2 Fälle zu seinem Vortheile. Da nun in 12 Nummern 66 Amben enthalten sind, so ist die Wahrscheinlichkeit für das Gewinnen einer Ambe $= \frac{66 \cdot 2}{801} = \frac{44}{267}$, d. h. unter 267 Fällen sind 44 zum Vortheil des Spielers.

Was die Ternen betrifft, so sind in 90 Nummern 117480 Ternen und in 5 Nummern 10 Ternen enthalten, folglich ist die Wahrscheinlichkeit für den, der eine Terne besetzt hat, $= \frac{10}{117480} = \frac{1}{11748}$, und für den, der 12 Nummern, also 220 Ternen besetzt hat, $= \frac{220}{11748} = \frac{5}{267}$.

Auf gleiche Art findet man die Wahrscheinlichkeit für die Quaternen bei Besetzung einer Quaterne $= \frac{1}{511038}$, und bei 12 Nummern, das ist bei Besetzung von 495 Quaternen $= \frac{495}{511038} = \frac{5}{5162}$.

Für die Besetzung einer Quinte endlich ist die Wahrscheinlichkeit $= \frac{1}{43949268}$ und für 12 Nummern oder 792 Quinten $= \frac{792}{43949268} = \frac{2}{110983}$.

26.

Die 90 Nummern lassen sich auf 43949268 verschiedene Arten zu 5 combiniren, er muß daher auch 43949268 Zettel zu 5 Nummern besetzen.

Was die zweite Frage betrifft, so erwäge man, daß die 5 gezogenen Nummern 5 Quaternen enthalten; combinirt man nun jede dieser Quaternen nach und nach mit einer von den 85 nicht herauskommenden Zahlen, so giebt dieses $5 \cdot 85 = 425$ Zettel mit Quaternen.

Bei der dritten Frage will man wissen, wie viel Zettel es sind, worauf 3 der gezogenen 5 Nummern mit 2 der nicht gezogenen 85 combinirt sind. Nun sind in 5 Nummern 10 Ternen und in 85 Nummern 3570 Amben enthalten, also ist die Anzahl der Zettel mit Ternen $= 10 \cdot 3570 = 35700$. Eben so erhält man bei der vierten Frage die Anzahl der Zettel mit Amben $= 89770 \cdot 10 = 897700$; und bei der

fünften Frage die Anzahl der Zettel mit Auszügen = 2024785 • 5 = 10123925.

Endlich ist die Anzahl der Zettel mit Nieten so groß wie die Anzahl der Quinten unter 85 Nummern; das ist: 32801517.

27.

13 Nummern lassen sich zu 6 auf $\frac{13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6}$ = 1716 Arten, und 32 Karten lassen sich zu 8 auf $\frac{32 \cdot 31 \cdot 30 \cdot 29 \cdot 28 \cdot 27 \cdot 26 \cdot 25}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}$ = 10518300 Arten combiniren. Das Verhältniß der Wahrscheinlichkeit des Gewinnstes bei beiden Spielen ist also

1716 : 10518300 oder 11 : 67425.

Wenn nun in beiden Spielen gleich viel riskirt werden soll, so müssen sich die Einsätze ebenfalls wie 11 : 67425 verhalten, weil im ersten Spiele 11 und im zweiten 67425 Fälle zu seinem Vortheile sind.

28.

Es ist einleuchtend, daß so oft man einen Haufen von 7 Kugeln nimmt, sich im andern 33 befinden müssen; da sich nun 40 zu 7 auf $\frac{40 \cdot 39 \cdot 38 \cdot 37 \cdot 36 \cdot 35 \cdot 34}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7}$ = 18643560 Arten combiniren lassen, so giebt es auch eben so viel Abtheilungen zu 7 und 33 Kugeln.

29.

Untersucht man zuvörderst, wie vorher, auf wie

viel Arten sich 21 Kugeln in 2 Haufen zu 10 und 11 Kugeln abtheilen lassen, so erhält man, weil sich 21 zu 10 auf $\frac{21 \cdot 20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17 \cdot 16 \cdot 15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10} =$ 352716 Arten combiniren lassen, eben so viel verschiedene Abtheilungen. Nun lassen sich aber noch 10 Kugeln in 2 Haufen zu 3 und 7 so oft abtheilen, als sich 10 zu 3 combiniren läßt, nämlich $\frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 120$mal. Es ist also überhaupt die Anzahl der Abtheilungen zu 3, 7 und 11 Kugeln $= 352716 \cdot 120 = 42325920$.

30.

Es lassen sich 19 Kugeln in 2 Haufen zu 11 und 8 auf 75582 Arten, ferner 11 Kugeln in 2 Haufen zu 6 und 5 auf 460 Arten, und endlich 6 Kugeln in 2 Haufen zu 2 und 4 auf 15 Arten combiniren. Es ist daher die Anzahl der sämmtlichen Abtheilungen $= 75582 \cdot 460 \cdot 15 = 523783260$.

31.

Verfährt man wie vorher, so erhält man das Product $225792840 \cdot 167960 = 37924165406400$.

32.

Hier ist die Frage: auf wie viele Arten können 32 Karten in 3 Theile eingetheilt werden, daß der erste und zweite aus 12 und der dritte aus 8 Blät-

tern bestehet. Verfährt man also wie in den vorigen Aufgaben, so erhält man das Product

$$225792840 \cdot 125970 = 28443124054800.$$

33.

Auch hier erhält man das Resultat, wenn man untersucht, wie oft sich 52 zu 13, 39 zu 13, 26 zu 13 combiniren läßt, und die hieraus erhaltenen Zahlen mit einander multiplicirt.

34.

Da nur eine von den gezogenen 5 Nummern in den 30 besetzten enthalten seyn soll, so müssen die übrigen 4 unter den andern nicht besetzten 60 befindlich seyn. Nun ist die Anzahl der Quaternen in 60 Zahlen $= \frac{60 \cdot 59 \cdot 58 \cdot 57}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 487635$. Folglich läßt sich eine jede der 30 Nummern 487635 mal mit 4, aus den 60 nicht besetzten, combiniren. Es sind also $487635 \cdot 30 = 14629050$ Fälle möglich, wo unter den 5 gezogenen Nummern eine von den 30 besetzten und 4 von den 60 unbesetzten enthalten sind. Da nun überhaupt die Anzahl der Quinten in 90 Nummern $= 43949268$ ist, so ist die gesuchte Wahrscheinlichkeit $= \frac{14629050}{43949268}$ *) $= \frac{28025}{84194}$.

*) Der größte gemeine Theiler ist 522.

35.

Man schließe hier auf eine gleiche Art. Unter den 5 gezogenen Nummern sollen 2 in den 30 besetzten, und folglich 3 in den 60 unbesetzten enthalten seyn. Nun enthalten 60 Nummern 24220 Ternen und 30 Nummern 435 Amben. Die Anzahl der möglichen Fälle für den Gewinnst ist also 34220 · 435 = 14885700. Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist daher, wenn man, wie oben, die Anzahl der Quinten in 90 Nummern zum Nenner macht, $= \frac{14885700}{43949268}$ *) $= \frac{171100}{505164}$.

36.

In 60 Nummern sind 1770 Amben, und in 30 Nummern 4060 Ternen enthalten. Das Product hiervon ist = 7186200. Folglich ist die gesuchte Wahrscheinlichkeit $= \frac{7186200}{43949268}$ **) $= \frac{82600}{505164}$.

37.

In 30 Nummern sind 142566 Quinten enthalten, folglich ist die gesuchte Wahrscheinlichkeit

$$\frac{142566}{43949268} \text{ ***)} = \frac{273}{84194}.$$

---

*) Der größte gemeine Theiler ist 87.

**) Der größte gemeine Theiler ist 87.

***) Der größte gemeine Theiler ist 522.

38.

Da unter den 9 gezogenen Karten nur 5 von Treff befindlich seyn sollen, so müssen die andern 4 zu den 24 Karten von den drei übrigen Farben gehören. Nun sind erstlich in 24 Karten 10626 verschiedene Combinationen zu 4 Karten enthalten; und da zweitens im Spiele 8 Karten von Treff sind, so enthalten diese 56 Combinationen zu 5 Karten. Es ist also die Anzahl aller möglichen Fälle für den Gewinnst $= 10626 \cdot 56 = 595056$. Die Anzahl der Fälle aber, welche überhaupt statt finden können, ist 28048800, weil sich 32 so oft zu 9 combiniren läßt. Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist daher $= \frac{595056}{28048800} = \frac{12397}{584350}$.

39.

Diese Aufgabe ist der 37sten ähnlich, nur daß hier 5 besetzte, und folglich 85 unbesetzte Nummern sind. Nun sind aber in 85 Zahlen 3570 Amben, und in 5 Zahlen 10 Ternen enthalten. Das Product hiervon ist 35700, folglich ist die gesuchte Wahrscheinlichkeit $= \frac{35700}{43949268} = \frac{2975}{3662439}$.

40.

Die Auflösungen zu der 40. und 41. Aufgabe lassen sich sehr leicht nach dem vorhergehenden finden.

42.

Die zuerst gezogenen 7 Kugeln sollen roth seyn;

da es nun 10 rothe Kugeln sind, so sind die möglichen Fälle für den Gewinnst = 120 (weil sich nämlich 10 zu 7, 120mal combiniren läßt). Die Anzahl der Fälle, welche überhaupt möglich sind, wenn aus 24 Kugeln 7 gezogen werden, ist 346104, mithin ist die Wahrscheinlichkeit 7 rothe Kugeln zu ziehen $= \frac{120}{346104}$ $= \frac{5}{14421}$. Ferner sollen zu gleicher Zeit 3 weiße Kugeln aus den übrigen 17 gezogen werden. Da nun 6 weiße Kugeln vorhanden sind, so sind die möglichen Fälle für den Gewinnst = 20. Die Anzahl der Fälle, welche überhaupt möglich sind, wenn aus 17 Kugeln 3 gezogen werden sollen, ist 680. Mithin ist die Wahrscheinlichkeit 3 weiße Kugeln zu ziehen $= \frac{20}{680} = \frac{1}{34}$. Da nun die Wahrscheinlichkeit für die 7 rothen Kugeln $= \frac{5}{14421}$ (das heißt, es sind unter den 14421 Fällen nur 5 für den Spieler), und da man ferner die 14421 Fälle immer mit einem von den 34 Fällen der drei weißen Kugeln combiniren muß, so sind es überhaupt $14421 \cdot 34 = 490314$ Fälle, worunter $5 \cdot 1 = 5$ Fälle für den Spieler sind. Das heißt: man findet die gesuchte Wahrscheinlichkeit $= \frac{5}{14421} \cdot \frac{1}{34} = \frac{5}{490314}$.

43.

Ein jeder Würfel hat 6 Flächen. Da nun jede der 6 Flächen des einen Würfels mit jeder der 6

Flächen des andern combinirt werden kann, so giebt dieses $6 \cdot 6 = 36$ verschiedene Würfe. Kömmt nun noch ein dritter Würfel hinzu, so müssen, wegen seiner 6 Flächen, die 36 Würfe noch mit 6 multiplicirt werden, und dieses giebt $6^3 = 216$. Kömmt ein vierter hinzu, so ist die Anzahl der Würfe $= 6^4 = 1296$. Folglich lassen sich im Allgemeinen mit n Würfeln 6^n verschiedene Würfe machen.

44.

Mit 4 Würfeln können überhaupt 1296 verschiedene Würfe gemacht werden, und unter diesen sind 6 Würfe (weil nämlich 6 mal 4 gleiche Augen geworfen werden können) für den Gewinnst. Die Wahrscheinlichkeit ist also $\frac{6}{1296} = \frac{1}{216}$.

45.

Mit 2 Würfeln läßt sich ein Pasch auf 6 verschiedene Arten werfen. Nun läßt sich ein jeder Pasch mit fünf Flächen des dritten Würfels combiniren. (Daß man nur mit 5 und nicht mit den 6 Flächen combiniren darf, rührt daher, weil der dritte Würfel nicht gleiche Augen haben darf mit dem Pasch.) Dieses giebt also $5 \cdot 6 = 30$ verschiedene Würfe. Ferner lassen sich 3 Würfel zu 2, dreimal combiniren. Die möglichen Fälle für einen Pasch sind daher $= 3 \cdot 30 = 90$. Da nun überhaupt 216 verschiedene Würfe

möglich sind, so ist die Wahrscheinlichkeit einen Pasch zu werfen $= \frac{90}{216} = \frac{5}{12}$.

46.

Die vier Würfel mögen A, B, C und D heißen. Nach der Aufgabe sollen 2 einen Pasch enthalten, während die andern beiden weder unter sich noch mit diesem Pasche gleiche Augen haben. Man nehme also an, auf A und B befindet sich ein Pasch, so darf dieser nicht mit den 6 Flächen von C, sondern nur mit 5 derselben combinirt werden, weil sonst ein Fall eintreten muß, wo C gleiche Augen mit dem Pasche von A und B hat. Die 5 Flächen von C aber lassen sich, aus denselben Gründen, nur mit 4 Flächen von D combiniren. Es können also C und D nur auf $4 \cdot 5 = 20$ Arten mit dem Pasche von A und B combinirt werden, und die 6 möglichen Pasche von A und B geben daher $6 \cdot 20 = 120$ verschiedene Würfe. Da man endlich statt des Pasches von A und B den von B und C, von C und D u. s. w. annehmen kann, oder, da in 4 Zahlen 6 Amben enthalten sind, so ist die Anzahl der Würfe für den Gewinnst $= 6 \cdot 120 = 720$. Die Anzahl der Würfe überhaupt aber ist bei 4 Würfeln $= 1296$, folglich ist die gesuchte Wahrscheinlichkeit $= \frac{720}{1296} = \frac{5}{9}$.

Bei 5 Würfeln A, B, C, D und E schließe man auf eine ähnliche Art. Es befinde sich auf A und B ein Pasch,

so darf dieser nur mit 5 Flächen von C combinirt werden. Die 5 Flächen von C aber dürfen nur mit 4 Flächen von D, und die vier Flächen von D nur mit 3 von E combinirt werden, wenn nicht mehrere Pasche als die 6 von A und B zugleich statt finden sollen. Es können daher C, D und E nur auf $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$ Arten mit dem Pasche von A und B combinirt werden, und die 6 möglichen Pasche von A und B geben also $6 \cdot 60 = 360$ verschiedene Würfe. Da man nun statt des Pasches von A und B den von B und C u. s. w. annehmen kann, oder, da in 5 Zahlen 10 Amben enthalten sind, so ist die Anzahl der Würfe für den Gewinnst $= 10 \cdot 360 = 3600$. Die Anzahl der Würfe überhaupt aber ist bei 5 Würfeln $= 6^5 = 7776$, folglich ist die gesuchte Wahrscheinlichkeit für 5 Würfel $= \frac{3600}{7776} = \frac{25}{54}$.

Bei 6 Würfeln A, B, C, D, E und F ist die Schlußfolge ganz dieselbe. Der Pasch von A und B kann sich nur mit 5 Flächen von C, die fünf Flächen von C aber nur mit 4 Flächen von D, die 4 Flächen von D nur mit 3 Flächen von E, und die 3 Flächen von E nur mit 2 von F combiniren. Das heißt: C, D, E und F können nur auf $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 120$ Arten mit dem Pasche von A und B combinirt werden. Die 6 Pasche von A und B geben daher $6 \cdot 120 = 720$ verschiedene Würfe. Da nun in 6 Zahlen 15 Amben sind, so ist die Anzahl der Würfe

für den Gewinnst = 15 · 720 = 10800. Nun aber ist die Anzahl der Würfe mit 6 Würfeln überhaupt = 6^6 = 46656, folglich ist die Wahrscheinlichkeit $= \frac{10800}{46656} = \frac{25}{108}$.

Ferner lassen sich bei 7 Würfeln A, B, C, D, E, F und G die Pasche von A und B mit 5 Flächen von C, die 5 von C mit 4 von D, die 4 von D mit 3 von E, die 3 von E mit 2 von F, die 2 von F mit 1 von G combiniren. Es können daher C, D, E, F und G auf 5 · 4 · 3 · 2 · 1 = 120 Arten mit den 6 Paschen von A und B combinirt werden, und dieses giebt 6 · 120 = 720 Würfe, welches noch mit 21 multiplicirt werden muß, weil in 7 Zahlen 21 Amben sind, wodurch man die Anzahl der Würfe für den Gewinnst = 21 · 720 = 15120 erhält. Und da die Anzahl der Würfe mit 7 Würfeln = 6^7 = 279936, so ist die Wahrscheinlichkeit $= \frac{15120}{279936} = \frac{35}{648}$.

Bei 8 Würfeln siehet man gleich, daß es unmöglich sey, mit 2 einen Pasch zu werfen, während die übrigen 6 weder unter sich noch mit diesem Pasche gleiche Augen haben. Die Wahrscheinlichkeit ist also 0.

47.

Mit 3 Würfeln läßt sich eine Terne auf 6 verschiedene Arten werfen. Man muß daher diese 6 Ternen mit 5 Flächen des vierten Würfels combiniren, und dieses giebt 5 · 6 = 30. Nun sind in 4 Zahlen 4 Ter-

nen enthalten, folglich ist die Anzahl der Würfe für den Gewinnst $= 6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$. Die Anzahl der Würfe überhaupt ist 1296. Es ist also die gesuchte Wahrscheinlichkeit $= \frac{120}{1296} = \frac{5}{54}$.

48.

Die 6 möglichen Ternen von A, B, C lassen sich mit 5 Flächen von D und mit 4 von E combiniren. Dieses giebt $6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$. In 5 Zahlen sind 10 Ternen enthalten, folglich ist die Anzahl für den Gewinnst $= 1200$. Die Anzahl der Würfe überhaupt ist $6^5 = 7776$. Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist daher $= \frac{1200}{7776} = \frac{25}{162}$.

Bei 6 Würfeln erhält man die Anzahl der Würfe für den Gewinnst $= 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 20 = 7200$, und folglich ist die Wahrscheinlichkeit $= \frac{7200}{46656} = \frac{25}{162}$.

Bei 7 Würfeln erhält man die Anzahl der Würfe für den Gewinnst $= 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 35 = 25200$. Folglich ist die Wahrscheinlichkeit $= \frac{25200}{279936} = \frac{175}{1944}$.

Bei 8 Würfeln erhält man die Anzahl der Würfe für den Gewinnst $= 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 56 = 40320$. Folglich ist die Wahrscheinlichkeit $= \frac{40320}{1679616} = \frac{35}{1458}$.

Bei 9 Würfeln siehet man gleich, daß es unmöglich sey, mit 3 eine Terne zu werfen, während die

übrigen 6 weder unter sich noch mit dieser Terne gleiche Augen haben. Die Wahrscheinlichkeit ist also 0.

49.

Der eine Pasch von den zwei Sechsen läßt sich mit 5 Flächen des dritten Würfels combiniren, es sind also $1 \cdot 5 = 5$ Fälle, und da in 3 Zahlen 3 Amben enthalten sind, so sind $3 \cdot 5 = 15$ Fälle für den Gewinnst möglich. Nun kann man mit 3 Würfeln überhaupt $6^3 = 216$ Würfe machen. Die Wahrscheinlichkeit des ersten Spiels ist daher $\frac{15}{216} = \frac{5}{72}$. Beim zweiten Spiele sollen aus 32 Karten 3 von einer, gleichviel welcher, Farbe gezogen werden. Da nun immer 8 gleichfarbige Blätter sind, so braucht man nur 8 zu 3 zu combiniren, und dieses giebt $\frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 56$, und da ferner im ganzen Spiele 4 mal 8 gleichfarbige Blätter enthalten sind, so erhält man $4 \cdot 56 = 224$ Fälle für den Gewinnst. Nun lassen sich 32 Karten überhaupt zu 3 auf $\frac{32 \cdot 31 \cdot 30}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 4960$ Arten combiniren. Die Wahrscheinlichkeit dieses Spiels ist also $\frac{224}{4960} = \frac{7}{155}$. Folglich ist das Verhältniß beider Wahrscheinlichkeiten $\frac{5}{72} : \frac{7}{155} = 775 : 504$.

50.

Aus der 46sten Auflösung ergiebt sich, daß die 8 Würfel, worauf sich gleiche Augen befinden, mit den 5 Flächen des neunten, mit den 4 Flächen des zehnten, mit den 3 Flächen des eilften, und mit den 2 Flächen des zwölften combinirt werden müssen. Da nun die 8 Würfel auf 6 verschiedene Arten gleiche Augen haben können, so giebt es für jede 8 Würfel $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 720$ Fälle für den Gewinnst. Nun lassen sich 12 zu 8 auf $\frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}$ $= 495$ Arten combiniren. Es sind also sämmtliche Fälle für den Gewinnst $= 720 \cdot 495 = 356400$. Die Anzahl der Würfe, welche mit 12 Würfeln überhaupt gemacht werden können, ist $= 6^{12} = 2176782336$, folglich ist die Wahrscheinlichkeit des ersten Spiels $= \frac{356400}{2176782336}$*) $= \frac{275}{1679616}$. Beim zweiten Spiele sollen aus 52 Karten 5 von einer, gleich viel welcher, Farbe gezogen werden. Da es nun $4 \cdot 13$ gleichfarbige Blätter sind, so braucht man nur 13 zu 5 zu combiniren und mit 4 zu multipliciren, und dieses giebt $\frac{4 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = 5148$ Fälle für den Gewinnst. Nun lassen sich 52 Karten überhaupt zu 5

*) Der größte gemeine Theiler ist 1296.

auf $\frac{52 \cdot 51 \cdot 50 \cdot 49 \cdot 48}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = 2598960$ Arten combiniren. Die Wahrscheinlichkeit dieses Spiels ist also $= \frac{5148}{2598960}$ *) $= \frac{33}{16660}$. Folglich ist das Verhältniß beider Wahrscheinlichkeiten $\frac{275}{1679616} : \frac{33}{16660} = 4581500 : 55427328$ **) $= 104125 : 1259712$.

*) Der größte gemeine Theiler ist 156.
**) Der größte gemeine Theiler ist 44.

XIV.

Auflösungen von den vermischten Aufgaben.

(Zu M. Hirsch Sammlung von Beispielen ꝛc. XXIII. Kapitel, von S. 305 bis 317.)

1.

Die Summe der Augen auf den drei ersten Karten sey $= x$. Nun beträgt die Anzahl dieser Augen nebst der Anzahl der darauf gelegten Karten zusammen genommen $3 \cdot 15 = 45$. Es ist demnach die Anzahl der darauf gelegten Karten $= 45 - x$. Da nun zuerst 3 Karten hingelegt sind, dann $45 - x$ Karten darauf gelegt worden, und 8 Karten übrig bleiben, so ist

$$3 + 45 - x + 8 = 32$$

$$\text{folgl. } x = 24.$$

2.

Die Anzahl der Augen auf den ersten n Karten sey wieder $= x$. Die Anzahl dieser Augen nebst der Anzahl der darauf gelegten Karten beträgt ns. Es ist daher die Anzahl der darauf gelegten Karten $= ns - x$. Da nun noch r Karten übrig bleiben, so ist

$$n + ns - x + r = a$$

folgl. $x = ns + n + r - a$

3.

Das Stück Tuch hatte x Ellen. Nun hat er beim Einkauf für 5 Ellen 7 rthlr. und also für x Ellen $\frac{7x}{5}$ rthlr. gegeben; beim Verkauf aber für 11 Ellen 16 rthlr., also für x Ellen $\frac{16x}{11}$ rthlr. erhalten. Er hat daher bei diesem Handel $\frac{16x}{11} - \frac{7x}{5}$ rthlr. gewonnen, und es ist nach der Aufgabe

$$\frac{16x}{11} - \frac{7x}{5} = 24$$

folgl. $x = 440$

4.

Wenn dem B x rthlr. genommen worden, so ist dem A 2x rthlr. genommen worden. Es ist daher, nach der Aufgabe,

$$100 - 2x = 3(48 - x)$$

folgl. $x = 44$ rthlr. Verlust des B

und also 88 rthlr. Verlust des A.

5.

Der Band mag bei beiden Büchern zu x gr. gerechnet seyn; so kostet das Papier des ersten Buches 14 — x gr. und das Papier des zweiten Buches 19

— x gr. Da nun 48 Bogen 14 — x gr. kosten, so kostet ein Bogen $\frac{14-x}{48}$ gr. Ferner kosten 78 Bogen des zweiten Buches 19 — x gr., folgl. kostet ein Bogen $\frac{19-x}{78}$ gr. Es ist demnach, da der Preis des Papiers in beiden Büchern gleich ist,

$$\frac{14-x}{48} = \frac{19-x}{78}$$

folgl. $x = 6$ gr.

6.

Man siehet leicht, daß hier von einer arithmetischen Progression die Summe $s = 156$, die Anzahl der Glieder $n = 16$, und das erste Glied $a = 6$ gegeben ist. Hiernach findet man das letzte Glied

$$t = \frac{2 \cdot 156}{16} - 6 = 13\tfrac{1}{2} \text{ rthlr.}$$

$$\text{und } d = \frac{13\frac{1}{2} - 6}{16 - 1} = \tfrac{1}{2} \text{ rthlr.}$$

7.

Hier ist $s = 2363$, $n = 34$ und $d = 3$ gegeben. Es ist demnach

$$a = \frac{2363}{34} - \frac{(34-1)\,3}{2} = 20 \text{ rthlr.}$$

8.

Durch die zweite Röhre mag der Wasserbehälter in x Minuten gefüllt werden, folglich füllt diese Röhre in einer Minute $\frac{1}{x}$ des Gefäßes. Die erste Röhre

füllt in 20 Minuten das Gefäß, folglich füllt sie in einer Minute $\frac{1}{20}$ des Gefäßes. Es füllen daher beide Röhren zu gleicher Zeit $\frac{1}{x} + \frac{1}{20}$ des Gefäßes. Da nun, nach der Aufgabe, das Gefäß durch beide Röhren in 12 Minuten gefüllt wird, so wird in einer Minute $\frac{1}{12}$ des Gefäßes gefüllt. Es ist demnach

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{20} = \frac{1}{12}$$

oder $60 + 3x = 5x$

folgl. $x = 30$ Minuten.

9.

Die Anzahl der Aepfel sey $= x$ und die der Birnen $= y$. Für vier Aepfel bezahlt er einen Groschen, folglich für x Aepfel $\frac{x}{4}$ gr. Für fünf Birnen bezahlt er einen Groschen, folglich für y Birnen $\frac{y}{5}$ gr. Es ist also nach dem ersten Theil der Aufgabe

$$\text{I.} \quad \frac{x}{4} + \frac{y}{5} = 18$$

Ferner kostet ihm die Hälfte der Aepfel $\frac{x}{8}$ gr. und der dritte Theil der Birnen $\frac{y}{15}$ gr. Es ist also nach dem zweiten Theile der Aufgabe

$$\text{II.} \quad \frac{x}{8} + \frac{y}{15} = 8$$

Man schaffe in beiden Gleichungen die Brüche weg,

multiplicire (I.) mit 2 und subtrahire sie von (II.), so erhält man

$$x = 48 \text{ Aepfel}$$

und hieraus $y = 30$ Birnen.

10.

Die Zahl sey x, so ist

$$x + 15 : x + 27 = x + 27 : x + 45$$

also $(x + 15) \cdot (x + 45) = (x + 27)^2$

oder $x^2 + 60x + 675 = x^2 + 54x + 729$

folgl. $x = 9$

11.

Das erste Glied der arithmetischen Progression sey x und die Differenz $= y$, so ist die arithmetische Progression

$$x,\ x + y,\ x + 2y$$

folglich ist die geometrische Progression

$$2x,\ 3(x + y),\ 6(x + 2y)$$

Nun ist in einer geometrischen Progression von drei Gliedern das Product der beiden äußern Glieder gleich dem Quadrate des mittlern Gliedes. Es ist demnach

$$12x\ (x + 2y) = [3(x + y)]^2$$

oder I. $x^2 + 2xy = 3y^2$

Ferner ist die Summe aller Glieder in beiden Progressionen $= 96$. Man erhält also

$$14x + 18y = 96$$

oder II. $7x + 9y = 48$

folgl. $y = \frac{48 - 7x}{9}$

Substituirt man den Werth von y in (I.), so ist

$$x^2 + 2x\frac{48-7x}{9} = 3\frac{(48-7x)^2}{81} = \frac{2304-672x+49x^2}{27}$$

$$\text{oder } 27x^2 + 288x - 42x^2 = 2304 - 672x + 49x^2$$

$$\text{oder } 64x^2 - 960x = -2304$$

$$\text{also } x^2 - 15x = -36$$

$$\text{folgl. } x = \frac{15}{2} - \sqrt{\left[\left(\frac{15}{2}\right)^2 - 36\right]} \text{*)} = 3$$

Substituirt man den Werth von x in (II.), so findet man

$$y = 3.$$

12.

A habe x rthlr., B y rthlr., C z rthlr., und der Werth des Gemäldes sey s, so ist

$$\text{I. } x + \frac{y+z}{2} = s$$

$$\text{II. } y + \frac{x+z}{3} = s$$

$$\text{III. } z + \frac{y+x}{4} = s$$

Man erhält aus (I.) und (II.) IV. $4z + z = 3y$
aus (I.) und (III.) V. $2z - 3x = y$
aus (IV.) und (V.) $z = \frac{13x}{5} = 2x + \frac{3x}{5}$
Man setze $x = 5n$, so ist $z = 13n$ und $y = 11n$;
nun sey $n = 1, 2, 3$ u. s. w.

---

*) Man hat hier die negative Wurzel genommen, weil die positive für y einen negativen Werth geben würde.

so ist x 5, 10, 15
y 11, 22, 33
z 13, 26, 39

hieraus findet man $s = 5 + \frac{11 + 13}{2} = 17$ rthlr.

oder $s = 10 + \frac{22 + 26}{2} = 34$ rthlr. u. s. w.

13.

A habe x rthlr., B y rthlr., C z rthlr., D v rthlr., E w rthlr., und was sie zusammen verzehrt haben, sey = s, so ist

$$\text{I.}\quad x + \frac{y + z + v + w}{4} = s$$

$$\text{II.}\quad y + \frac{x + z + v + w}{5} = s$$

$$\text{III.}\quad z + \frac{y + x + v + w}{6} = s$$

$$\text{IV.}\quad v + \frac{y + x + z + w}{7} = s$$

$$\text{V.}\quad w + \frac{x + y + z + v}{8} = s$$

Man erhält aus I. u. II. $16x + z + v + w = 15y$ VI.
aus I. und III. $9z - 10x - v - w = y$ VII.
aus I. und IV. $7v - 8x - z - w = y$ VIII.
aus I. und V. $6w - 7x - z - v = y$ IX.
aus VI. und VII. $67z - 83x + 8w = 8v$ X.
aus VI. und VIII. $17x + 2z + 2w = 13v$ XI.
aus VI. und IX. $89w - 121x - 16z = 16v$ XII.
aus X. und XI. $57z - 81x = 8w$ XIII.
aus X. und XII. $10z - 3x = 7w$ XIV.
aus XIII. und XIV. $543x = 319z$

$$\text{folgl. } z = \frac{543x}{319} = x + \frac{224x}{319}$$

Setzt man also $x = 319n$

so ist $z = 543n$

$w = 639n$

$v = 599n$

$y = 459n$

Ist nun n 1, 2 u. s. w.,

so ist x	319,	638
y	459,	918
z	543,	1086
v	599,	1198
w	639,	1278

Hieraus findet man

$$s = 319 + \frac{459 + 543 + 599 + 639}{4} = 879 \text{ rthlr. etc.}$$

14.

Es mögen anfänglich x Personen gewesen seyn, es hatte daher jede $\frac{342}{x}$ rthlr. zu bezahlen. Nachdem drei davon laufen, bleiben $x - 3$ zurück, und nun muß jede 19 rthlr. mehr, das ist $\frac{342}{x} + 19$ bezahlen, folglich müssen die zurückbleibenden $x - 3$ Personen $(x - 3)\left(\frac{342}{x} + 19\right)$ rthlr. bezahlen. Es ist demnach

$$(x - 3)\left(\frac{342}{x} + 19\right) = 342$$

$$\text{oder } x^2 - 3x = 54$$

$$\text{folglich } x = 9 \text{ Personen.}$$

15.

Man habe x rthlr. dafür gegeben, so ist der Verlust x — 420 rthlr., und der Gewinnst, im Falle man 570 rthlr. bekommen hätte, 570 — x rthlr. Es ist demnach

$$570 - x = 4\,(x - 420)$$
$$\text{folgl. } x = 450 \text{ rthlr.}$$

16.

Das Gras, welches bereits auf einer Q. R. stand, sey = 1, folglich war das Gras auf der ganzen Wiese = 400. Ferner sey das Gras, welches in einer Woche auf einer Q. R. wächst, = x, so wächst in sieben Wochen auf 400 Q. R. 2800x. Nun haben 8 Pferde in 7 Wochen 400 Q. R. abgeweidet, d. h. sie haben 400 + 2800x Gras gefressen; es frißt also ein Pferd in einer Woche $\frac{400 + 2800x}{56} = \frac{50 + 350x}{7}$. Ein andermal haben unter gleichen Umständen 9 Pferde in 8 Wochen eine Wiese von 500 Q. R. abgeweidet; es ist also das Futter von einem Pferde in einer Woche $= \frac{500 + 4000x}{72} = \frac{125 + 1000x}{18}$. Mithin ist

$$\frac{50 + 350x}{7} = \frac{125 + 1000x}{18}$$
$$\text{folgl. } x = \frac{1}{28}$$

also verzehrt ein Pferd in einer Woche

Ee

$$\frac{50 + 350 \cdot \frac{1}{28}}{7} = \frac{125}{14}$$

und daher in 12 Wochen $\frac{750}{7}$

Nun beträgt das Gras einer Wiese von 600 □. R. in 12 Wochen $600 + 7200 \cdot \frac{1}{28} = \frac{6000}{7}$. Da also $\frac{750}{7}$ das 12wöchentliche Futter eines Pferdes ist, so ist $\frac{6000}{7}$ das Futter von 8 Pferden in derselben Zeit.

17.

Die Tochter bekomme x rthlr., folglich bekömmt die Mutter 2x rthlr. und der Sohn 6x rthlr. Es ist demnach

$$x + 2x + 6x = 9000$$
$$\text{folgl. } x = 1000 \text{ rthlr.}$$

18.

In x Tagen nach der Abreise des ersten mag der zweite ihn eingeholt haben. Da nun der erste Reisende den ersten Tag eine Meile und jeden folgenden Tag immer eine Meile mehr gemacht hat, so hat er den letzten Tag x Meilen gemacht, und folglich sind die sämmtlichen Meilen, die er zurückgelegt hat, gleich der Summe einer arithmetischen Progression, deren erstes Glied 1, das letzte Glied und die Anzahl der Glieder x ist, d. h. $= \frac{1}{2}x\ (1 + x)$. Der zweite hat den ersten in $x - 5$ Tagen eingeholt, und hat täglich 12 Meilen gemacht. Es ist demnach

$$\tfrac{1}{2}x\ (1 + x) = 12\ (x - 5)$$
folgl. $x = 8$ Tage.

19.

In x Tagen nach der Abreise des ersten habe der zweite ihn eingeholt. Der erste Reisende macht den ersten Tag a Meilen, und jeden folgenden Tag d Meilen mehr. Er hat daher am letzten Tage dx Meilen gemacht. Die sämmtlichen Meilen, die er zurückgelegt hat, sind demnach gleich der Summe einer arithmetischen Progression, deren erstes Glied $= a$, das letzte Glied $= dx$, und die Anzahl der Glieder $= x$. Diese Summe ist daher

$$= \tfrac{1}{2}x\ (a + dx)$$

Der zweite hat den ersten in $x - n$ Tagen eingeholt und hat täglich b Meilen gemacht. Es ist demnach

$$\tfrac{1}{2}x\ (a + dx) = b\ (x - n)$$
oder $\tfrac{1}{2}dx^2 + \tfrac{1}{2}ax - bx = -bn$
$$x^2 + \left(\frac{a - 2b}{d}\right) x = -\frac{2bn}{d}$$
folgl. $x = \dfrac{-(a - 2b) \pm \sqrt{[(a - 2b)^2 - 8bdn]}}{2d}$

20.

Man erhält die Gleichungen

$$x + y = xy$$
und $x + y + x^2 + y^2 = 15\tfrac{3}{4}$

welche bereits oben S. 109 §. 12 aufgelöst worden sind; man braucht daher nur die hier gegebene be-

kannte Größe $15\frac{1}{4}$ in die dortigen Formeln statt a gehörig zu substituiren.

21.

Hier ist eigentlich die Frage, welche Zahlen lassen durch 4, 6 oder 9 dividirt den Rest 3, durch 7 oder 13 den Rest 1, und durch 11 den Rest 7 übrig? Die gesuchten Zahlen müssen also die Formen $36x + 3$, $91y + 1$ und $11z + 7$ haben. Wie man aber hieraus die Zahlen selbst findet, ist bereits oben bei den Auflösungen von den unbestimmten Aufgaben hinlänglich gezeigt worden, und braucht daher hier nicht wiederholt zu werden.

22.

Der erste habe x Patronen, und also der zweite $1000 - x$ gefüllt. Der erste gebraucht zu $1000 - x$ Patronen 18 Centn. Pulver, folglich hat er zu seinen x Patronen $\frac{18x}{1000 - x}$ Centn. Pulver verbraucht; der zweite braucht zu x Patronen 8 Centn. Pulver, folglich hat er zu seinen $1000 - x$ Patronen $\frac{8000 - 8x}{x}$ Centn. verbraucht. Es ist demnach

$$\frac{18x}{1000 - x} = \frac{8000 - 8x}{x}$$

folgl. $x = 400$ Patronen ꝛc.

23.

Man behandle die Auflösung dieser Aufgabe wie

es oben bei der Zinsrechnung an mehreren Beispielen ist gezeigt worden.

24.

Er habe die Mischung xmal wiederholt. Nach der ersten Mischung war im Fasse überhaupt 99 Quart reiner Wein, und folglich in jedem Quart besonders $\frac{99}{100}$ Quart geblieben. Die Güte des Weines nach erster Mischung ist also pro Quart auf $\frac{99}{100}$ schlechter geworden. Nimmt man abermals 1 Quart von den 100 Quart gemischten Weines, so verschlechtert er sich ebenfalls wie vorher auf $\frac{99}{100}$ pro Quart. Da nun diese Mischung auf eine gleiche Art xmal geschiehet, so verschlechtert sich der Wein nach der letzten Mischung auf $\left(\frac{99}{100}\right)^x$ mal pro Quart. Nach der Aufgabe kostet das Quart nach der letzten Mischung statt $1\frac{1}{2}$ nur noch 1 rthlr.; es ist daher in jedem Quart nur $\frac{2}{3}$ Quart reiner Wein geblieben. Es ist demnach

$$\left(\frac{99}{100}\right)^x = \frac{2}{3}$$

Mit Hülfe der Logarithmen findet man hieraus

$$x = 40 \text{ bis } 41 \text{mal}.$$

25.

Die Auflösung dieser unbestimmten Aufgabe bleibt hier weg, weil im X. Kapitel mehrere Aufgaben von dieser Gattung bereits aufgelöset worden sind.